

В. В. ВАСИН

Б. М. СТЕПАНОВ



ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ ПРИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ



«ЭНЕРГИЯ»

БИБЛИОТЕКА ПО РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ



Выпуск 7

ВАСИН В. В., СТЕПАНОВ Б. М.

ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ
УСТРОЙСТВ ПРИ ОПТИМАЛЬНОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ

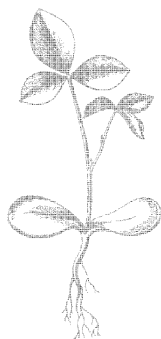


ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЭНЕРГИЯ»

МОСКВА

1967

ЛЕНИНГРАД



Scan AAW

В брошюре рассматриваются сигналы, которые образуются на выходе приемников радиотехнических устройств при оптимальных методах приема, а также вопросы обнаружения, разрешения и точности измерения параметров сигналов по выходному эффекту достаточного приемника.

Авторы ставили своей целью пояснить существо современных представлений и дать методику инженерных расчетов характеристик сигналов, образующихся на выходе оптимального приемника. Приведены числовые примеры, иллюстрирующие изложенную методику расчета.

Брошюра предназначена для инженеров-радиостов и студентов радиотехнических вузов.

Васин Владимир Васильевич, Степанов Борис Михайлович.
Выходные сигналы радиотехнических устройств при оптимальной фильтрации. М.—Л., изд-во „Энергия“, 1967,
144 стр. с илл. (Библиотека по радиоэлектронике. Вып. 7)

3-4-1

298-67

Редактор *Власов О. В.*

Обложка художника *А. Л. Кувшинникова*

Техн. редактор *В. В. Зеркаленкова* Корректор *Е. В. Кузнецова*

Сдано в набор 23/IX 1966 г. Подписано в печать 17/XII 1966 г.
Бумага типографская № 2 84×108¹/₃₂ Физ. печ. л. 4,5
Усл. печ. л. 7,56 Уч.-изд. л. 7,1 Т-16828 Тираж 12 000 экз.

Цена 36 коп.

Зак. 2632

Издательство „Энергия“, Москва, Ж-114, Шлюзовая наб. 10.

Московская типография № 10 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Шлюзовая наб., 10.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
<i>Глава первая. Радиосигналы и их обработка</i>	5
1. Радиосигналы — переносчики информации	5
2. Сигналы и помехи	10
3. Селекция сигналов	13
4. Оптимальная фильтрация сигналов	18
5. Идеальный и достаточный приемники	22
6. Выходные сигналы достаточного приемника	32
<i>Глава вторая. Обнаружение сигналов</i>	36
7. Обнаружение сигналов с полностью известными параметрами	36
8. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами	45
9. Реальные характеристики обнаружения	65
10. Методика определения требуемой энергии сигнала	67
<i>Глава третья. Разрешение сигналов</i>	69
11. Общие сведения	69
12. Метод оценки потенциальной разрешающей способности при условии большого отношения энергий сигналов и шума	72
13. Потенциальная разрешающая способность по времени	77
14. Потенциальная разрешающая способность по частоте	85
15. Одновременное разрешение по времени и частоте. Принцип неопределенности в радиотехнике	87
16. Потенциальная разрешающая способность по времени и частоте при сигнале в виде пачки когерентных импульсов	96
17. Статистическая теория разрешения двух сигналов	104
18. Реальная разрешающая способность	120
<i>Глава четвертая. Точность измерения параметров сигналов</i>	123
19. Основные сведения из теории ошибок. Задача измерения параметров сигналов	123
20. Потенциальная точность измерения одного параметра сигнала	125
21. Потенциальная точность одновременного измерения двух параметров сигнала	133
22. Реальная точность измерения параметров сигналов	137
Литература	144

ПРЕДИСЛОВИЕ

При расчете и конструировании радиоустройств, предназначенных для приема радиосигналов, несущих самую различную информацию, приходится особое внимание уделять проблеме разделения сигналов и помех. В некоторых случаях сигналы и помехи имеют различие по основным параметрам — частоте, амплитуде, длительности и т. д., и их разделение осуществляется довольно просто. Однако в ряде областей радиотехники приходится сталкиваться с наличием помех шумового типа.

Для разделения сигналов и помех шумового типа используются статистические различия сигнала и шума. Теоретической базой конструирования современных радиоприемных устройств становится математическая статистика. Возникает необходимость статистической оценки параметров сигналов, образующихся на выходе приемника и определяющих качество информации, поступающей к получателю.

В связи с этим возникла необходимость в создании пособий, позволяющих широкому кругу заинтересованных читателей познакомиться с этими важными для современной радиотехники вопросами. К таким пособиям и относится настоящая брошюра, в которой сделана попытка доступно и сжато изложить основные идеи, связанные с обнаружением радиосигналов, разрешением и измерением их параметров при оптимальных методах приема. В работе анализируются потенциальные и реальные показатели радиотехнических устройств. Приведены соотношения, пригодные для инженерных расчетов. Подобраны примеры, иллюстрирующие сущность изложенной методики оценки этих показателей. Сделанные в работе ссылки на фундаментальные источники будут полезны тем читателям, которые захотели бы углубиться в изучение затронутых вопросов.

Главы 1 и 2 написаны Б. М. Степановым, а гл. 3 и 4 — В. В. Васиным.

Авторы выражают глубокую признательность доктору технических наук М. В. Максимова за весьма полезные советы и замечания, сделанные при рецензировании рукописи.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

РАДИОСИГНАЛЫ И ИХ ОБРАБОТКА

1. Радиосигналы — переносчики информации

В свете последних достижений науки и техники становится особенно очевидным, какую ценную услугу оказал человечеству наш великий соотечественник Александр Степанович Попов. Изобретатель радио открыл возможность передачи без проводов с большой скоростью самых различных сообщений или, как мы теперь говорим, различной информации.

За сравнительно небольшой промежуток времени — с 12 марта 1896 г., даты посылки А. С. Поповым первой в истории нашей планеты радиограммы, и до наших дней — радиотехника получила огромное развитие. Незузнаваемо преобразились радиотехнические устройства. Практические возможности использования радиоприборов для передачи различной информации обгоняют идеи самых смелых фантастов.

Информация передается по каналу связи, представляющему собой совокупность источника сообщения, источника электромагнитных волн, среды, приемного и выходного устройств (рис. 1). В канале связи происходят следующие основные процессы. Во-первых, в результате воздействия источника сообщения излучаемые электромагнитные колебания претерпевают определенные изменения, зависящие от передаваемого сообщения. Радиоволны, параметры которых (направление распространения, поляризация, частота и др.) каким-то образом связаны с передаваемым сообщением, называются радиосигналами.

Радиосигналы переносят информацию от источника сообщений к приемному устройству. В приемной антенне радиоволны преобразуются в электрические колебания,

из которых с помощью приемника извлекается полезная информация. В эту самую общую схему укладывается огромное разнообразие конкретных применений радиотехники и соответствующих им видов радиосигналов. Источником сообщений может оказаться и диктор радиоцентра, и летящий самолет, и одна из планет вселенной. В одном случае необходимо будет, например, передать человеческую речь, в другом — сообщение о скорости полета самолета, в третьем — данные о свойствах

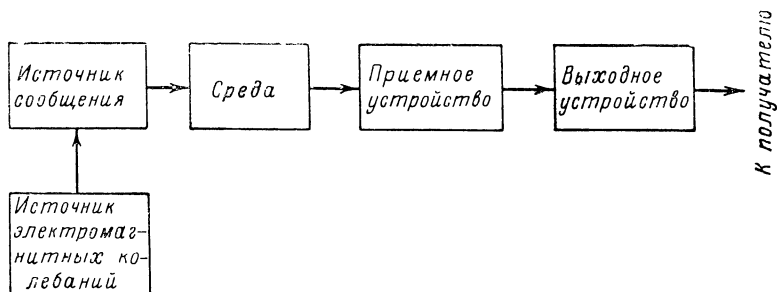


Рис. 1. Функциональная схема канала связи.

космического тела. Совершенно очевидно, что применительно к конкретным задачам будут выбраны и свои методы воздействия источника сообщений на радиоволны, способы управления параметрами электромагнитных колебаний, системы обработки сигналов в приемнике, а также окончательный вид выдаваемой информации. В каждом случае будут выбираться длины используемых радиоволн, мощности источников излучения электромагнитных колебаний и другие параметры каналов связи.

Сигналы всегда сопровождаются помехами, и передаваемая информация оказывается искаженной. Поэтому важнейшая часть работы приемника состоит в разделении сигналов и помех и выделении полезной информации с минимально возможными искажениями. Приемные устройства, наилучшим образом отделяющие (отфильтровывающие) сигналы от помех с минимальными искажениями переданной информации, называются оптимальными.

Передаваемая информация может быть заключена в самом факте наличия или отсутствия сигнала, в соче-

тании группы различных сигналов, в значении какого-либо из параметров сигнала и, наконец, в форме или виде сигнала.

Установление факта наличия сигнала называется обнаружением этого сигнала.

Анализ группы одновременно существующих сигналов с указанием того, какие именно сигналы присутствуют в данный момент, принято называть их разрешением.

Определение значений параметров сигналов, позволяющее расшифровать соответствующие им сообщения, представляет собой измерение.

В последующем изложении будут освещены пути построения оптимальных приемных устройств и анализ их основных характеристик при наличии помех. Задача ставится так: известны вид сигналов на входе приемника и их характеристики, а также характеристики помех, сопутствующих сигналам; требуется указать схему и характеристики соответствующего оптимального приемного устройства и проанализировать вид его выходных сигналов. Необходимо также дать оценку надежности обнаружения, разрешающей способности и точности измерения параметров сигналов при использовании оптимального приемника.

Следует несколько уточнить понятия о входном и выходном сигналах. Если передается информация о непрерывно изменяющейся величине $X(t)$, то входной сигнал можно представить себе в виде непрерывно поступающих электромагнитных волн, содержащих требуемую информацию, а выходной — как напряжение u или ток i , являющиеся функцией X : $u(X)$ или $i(X)$. Пусть, например, нужно передать по телеметрическому каналу радиосвязи значения механических напряжений P_i , возникающих в различных элементах испытуемой конструкции. Информация об усилии P_i (рис. 2,а) может быть передана радиосигналом, изображенным на рис. 2,б (амплитудно-модулированные колебания); этот сигнал будет входным для приемного устройства. Выходной сигнал мог бы быть получен путем детектирования и усиления входного радиосигнала и представлял бы собой напряжение, повторяющее по форме изменения величины P_i .

Однако на практике очень часто используют иной путь передачи сообщений. Оказывается, что для пере-

дачи непрерывного изменения величины X совершенно не обязательно использовать непрерывные сигналы. Одна из фундаментальных теорем теории информации (теорема Котельникова) [Л. 1] устанавливает, что функция $X(t)$, не содержащая в своем спектре частот выше $F_{\text{макс}}$, полностью определяется последовательностью ее

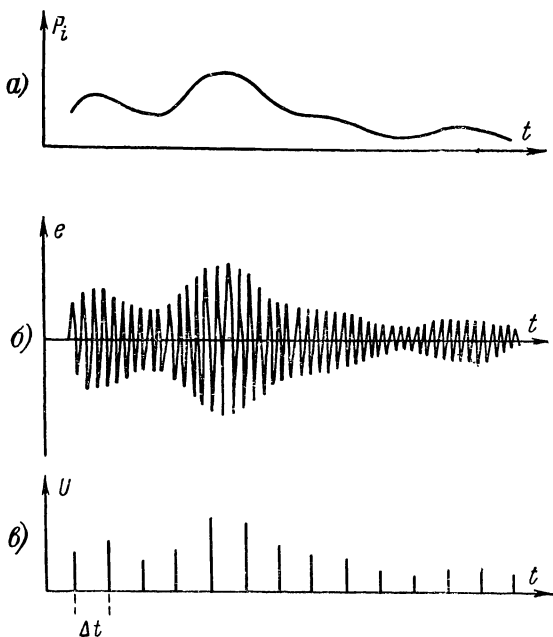


Рис. 2. Взаимосвязь сигнала и передаваемого сообщения.

a — механическое напряжение; b — напряженность электрического поля радиосигнала; c — амплитуды дискретных составляющих сигнала.

значений, отстоящих друг от друга на интервал времени $\Delta t = 1/2F_{\text{макс}}$. Другими словами, если функция $X(t)$ не содержит частот выше $F_{\text{макс}}$, передача информации может осуществляться дискретными (прерывистыми) сигналами, следующими друг за другом через интервалы $\Delta t \leq 1/2F_{\text{макс}}$ (рис. 2, c). При длительности исследуемого процесса T необходимо передать m его значений, где $m = 2TF_{\text{макс}}$.

Если принять, что спектр представляющих интерес частот находится в пределах от 2—3 до 100 гц (т. е.

$F_{\text{макс}} = 100 \text{ гц}$), то передачу значений каждого из исследуемых усилений следует производить через интервал времени Δt не более $1/200 \text{ сек.}$ В остальное время может передаваться информация о других параметрах.

При дискретной передаче входной радиосигнал состоит из серии элементарных сигналов $u_{\text{вх}}$ (рис. 3,а), каждому из которых соответствует элементарный выходной сигнал $u_{\text{вых}}$ приемного устройства (рис. 3,б),

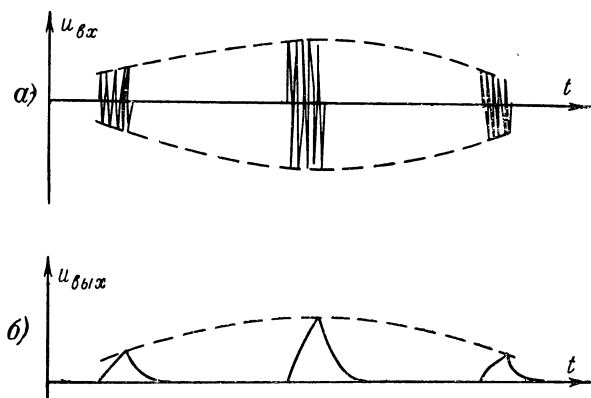


Рис. 3. Соответствие между входными и выходными сигналами.

а — входные сигналы; б — выходные сигналы.

содержащий небольшую часть всей переданной информации. Можно считать поэтому, что в приемнике осуществляется начальная обработка элементарных сигналов.

Из приемника выходные сигналы поступают в устройство дополнительной обработки, представляющее собой, например, электроннолучевой индикатор или цифровую вычислительную машину, где информация, содержащаяся в элементарных сигналах, накапливается и получателю выдается полное сообщение.

В том случае, когда нужно передать, например, сообщение о фиксированном значении какой-то величины, в принципе было бы достаточно использовать один элементарный сигнал. Однако из-за ряда обстоятельств, которые ниже будут частично рассмотрены, и в этом случае обычно используют для передачи информации несколько элементарных радиосигналов.

2. Сигналы и помехи

Радиосигнал определяется многими параметрами; к ним относятся направление распространения радиоволны, ее поляризация, момент прихода к приемнику, длительность сигнала, его амплитуда, частота и фаза. Каждый из указанных параметров может быть определенной функцией времени, и в каждом из них (или сразу в нескольких) может быть заключена полезная информация. Помеха может исказить значение любого параметра, в результате чего будет принята ложная информация.

Помехой называется возмущение, возникающее в канале связи и препятствующее правильному приему сигналов [Л. 2]. Имея в виду канал передачи радиосигналов, к помехам относят возмущения, приводящие к изменению параметров распространяющихся радиоволн или электрических колебаний в приемнике.

Помехи могут быть разделены на регулярные и случайные. Регулярными помехами называются возмущения, законы изменения которых представляют собой определенные функциональные зависимости, а их параметры могут быть определены или заданы. Устранение регулярных помех не представляет затруднений.

Примером регулярной помехи является фон переменного тока выпрямителя, прослушиваемый в ламповых радиовещательных приемниках. Этот фон можно устранить, используя простейшую систему компенсации: нужно в противофазе подвести к выходному каскаду приемника переменную составляющую выпрямленного напряжения.

Возмущения, которые в зависимости от случая принимают те или иные значения с определенными вероятностями, называются случайными помехами. Борьба со случайными помехами является важнейшей проблемой радиоприема, сопряженной с существенными трудностями.

Случайные помехи, которые в дальнейшем будем называть просто помехами, могут создаваться естественным и искусственным путями. Помехи естественного происхождения порождаются различного рода флуктуациями, т. е. случайными отклонениями тех или иных физических величин от их средних значений. Так, например, может флуктуировать траектория распространения радиоволны вследствие случайных изменений свойств

среды (влажности, температуры, ионизации и др.); под влиянием тех же факторов может флуктуировать затухание радиоволн на пути их распространения; флуктуирует около среднего значения ток в цепи любого электровакуумного прибора; флуктуируют и параметры самого приемника (усиление, фазовые сдвиги и др.).

Указанные флуктуации по-разному проявляют себя в канале связи. Флуктуации электрического тока, обусловленные дискретной природой носителей зарядов (ионов и электронов), а также их тепловым движением, создают непрерывно действующую помеху, существующую независимо от сигнала. Помеха как бы прибавляется к сигналу, и напряжение в приемнике может быть представлено в виде суммы сигнала и помехи

$$u(t) = u_c(t) + u_{\text{ш}}(t). \quad (1)$$

Такая помеха называется аддитивной.

Принципиально иным образом проявятся, например, флуктуации затухания радиоволн. Эти флуктуации приводят к случайным изменениям амплитуды принимаемых сигналов и будут обнаружены только при наличии самих сигналов. Если сигнала нет, то изменения затухания останутся незамеченными в канале связи. Влияние таких помех на сигнал может быть выражено дополнительным множителем в составе входного напряжения приемника:

$$u(t) = v(t) u_c(t), \quad (2)$$

где $v(t)$ — случайный процесс, определяемый помехой.

Помехи, возникающие только в связи и одновременно с сигналом и описываемые формулой (2), принято называть мультипликативными.

Искусственные помехи создаются с помощью специальных радиотехнических устройств и предназначены для нарушения нормальной работы канала связи. Искусственно созданная помеха также может быть и аддитивной и мультипликативной. Искусственную аддитивную помеху можно создать, например, с помощью непрерывно излучающего передатчика помех, перекрывающего некоторый диапазон частот вокруг рабочей частоты радиосигнала.

Аналогичный передатчик при определенных условиях может создавать и мультипликативную искусственную помеху. Пусть, например, передатчик помех будет расположен на пути между передатчиком и приемником

канала связи (точка *Б* на рис. 4); включение передатчика помех осуществляется автоматически в момент прохода фронта радиосигнала через точку *Б*, а выключается передатчик срезом радиосигнала. При таких условиях помеха будет мультипликативной.

Вид помехи, сопутствующей сигналу, в большой степени влияет на устройство приемника, в котором должно осуществляться отделение сигналов от помех и выделение полезной информации с наименьшими искажениями.

В настоящее время достаточно полно разработаны проблемы защиты от аддитивных помех. Что же касается мультипликативных, то условия их образования и тем более методы их подавления только начинают серьезно изучаться; здесь еще много «белых пятен», ждущих своих исследователей.

Разделение сигналов и помех, уменьшающее искажения переданной информации, возможно лишь в том случае, если заранее известны различия между ними. Следовательно, проектируя приемник, необходимо знать характеристики и сигнала, и помехи.

В большинстве случаев сигнал формируется с помощью передатчика, поэтому ряд его параметров и закономерности их изменения во времени действительно будут известны. Однако для того чтобы сигнал нес какую-то информацию, какие-то новые сведения, он обязательно должен содержать неизвестный заранее элемент. Такими элементами могут быть направление или время прихода сигнала, его амплитуда, частота и др. Сигналы обычно описываются функциональными зависимостями их параметров от времени. Если используется напряжение переменного тока на входе приемника после антенны, то в наиболее общем виде его можно выразить следующим образом:

$$u_c(t) = \dot{F}(t) \exp[j\omega t + \psi_0], \quad (3)$$

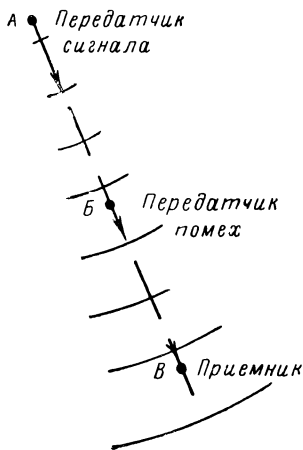


Рис. 4. Распространение радиоволн в пространстве.

где $\dot{F}(t)$ — комплексная амплитуда напряжения, являющаяся функцией времени;

ω — угловая частота колебаний;

ϕ_0 — начальная фаза колебаний.

Помеха, являясь случайным процессом, характеризуется своими распределениями или числовыми показателями в виде моментов распределения (чаще всего первого и второго порядка) [Л. 3].

Качество выделения переданной информации в большой степени зависит от соотношения интенсивности сигнала и помехи на входе приемника. Обычно имеют в виду отношение сигнал/помеха по мощности P_c/P_{π} , где P_c и P_{π} — мгновенные значения мощности сигнала и помехи, или по энергии E_c/E_{π} , где $E_c = P_c T_c$ — полная энергия сигнала за время T_c , E_{π} — энергия помехи за то же время, T_c — продолжительность процесса.

Чем больше величина P_c/P_{π} , тем меньше искажения переданной информации; например, при $P_c/P_{\pi} \geq 500 \div 1000$ можно считать помеху отсутствующей. Наоборот, малому значению величины P_c/P_{π} сопутствуют большие искажения передаваемой информации, а при $P_c/P_{\pi} \leq 0,01$ передача информации практически прекращается. Именно поэтому при создании канала радиосвязи необходимо добиться достаточно большого соотношения сигнал/помеха на входе приемника.

3. Селекция сигналов

В некоторых случаях сигналы и помехи имеют заметные различия по одному или нескольким параметрам. Выделение сигнала в присутствии помехи, основанное на использовании их различий по какому-либо определенному параметру, называется селекцией сигналов. Если с помощью селектирующего устройства достигается достаточно большое отношение сигнал/помеха, то можно обнаруживать и разрешать сигналы, а также измерять их параметры с большой надежностью.

В зависимости от параметра, по которому имеется различие между сигналом и помехой, существуют пространственная, временная, амплитудная, частотная и поляризационная селекции.

Пространственная селекция может быть использована в тех случаях, когда сигналы и помехи

приходят в точку приема с различных направлений. Такая селекция основана на использовании направленности действия приемных антенн. Пусть в точке A (рис. 5) расположено приемное устройство, в точке B — источник информации, а в точке B — источник помех. Если бы антенна приемника была ненаправленной, то интенсивная помеха поступала бы в приемный тракт и нарушала его работу.

Применение антенны направленного действия позволит сильно ослабить или практически исключить влияние помехи. Соотношение сигнал/помеха будет при этом улучшено в $G(\varphi_k)/G(\varphi_n)$ раз, где $G(\varphi_k)$ — значение коэффициента направленного действия приемной антенны (по мощности) в направлении корреспондента, $G(\varphi_n)$ — то же для направления на источник помехи, φ_k и φ_n — угловые координаты корреспондента и помехи (рис. 5). Если используются ультракороткие волны, то значение отношения $G(\varphi_k)/G(\varphi_n)$ может достигать 10^3 — 10^4 при разности углов $|\varphi_k - \varphi_n|$ порядка нескольких градусов.

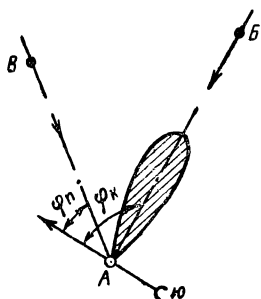


Рис. 5. Направленный прием сигналов.

Временная селекция находит применение при существенном различии либо моментов прихода сигнала и помехи, либо их длительности. Временная селекция позволяет, например, эффективно бороться с помехами радиоприему, создаваемыми грозowymi разрядами. Помехи такого типа, вызывающие неприятный треск в громкоговорителях вещательных приемников, имеют небольшую длительность по сравнению с сигналом и характеризуются относительно большой интенсивностью. Графики на рис. 6 иллюстрируют напряжение сигнала (рис. 6,а) и помехи (рис. 6,б) на нагрузке детектора приемника. Если радиоприемник запереть на время действия помехи, то помеха на выход приемника не пройдет, а искажения сигнала будут столь незначительными, что их трудно будет заметить. На рис. 7 приведена функциональная схема приемника с автоматической регулировкой усиления. После усиления высокочастотные колебания поступают к детектору, имеющему два выхода: один — к усилителю низкой частоты, а вто-

рой — к быстродействующей схеме автоматической регулировки усиления (АРУ), которая управляет усилением выходной части приемника. Схема АРУ реагирует на относительно большой уровень напряжения, поэтому нормальный сигнал на нее не действует, а срабатывает она только от интенсивной помехи. Выходное напряже-

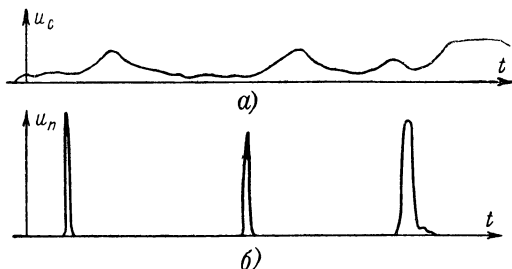


Рис. 6. Временные различия между сигналом и помехой.

a — напряжение сигнала; b — напряжение помехи.

ние схемы АРУ уменьшает коэффициент усиления усилителя вплоть до запирающего последнего при очень сильных помехах. Как видно, в рассмотренном устройстве используется и амплитудная селекция, которая основана на различии амплитуд сигнала и помехи.

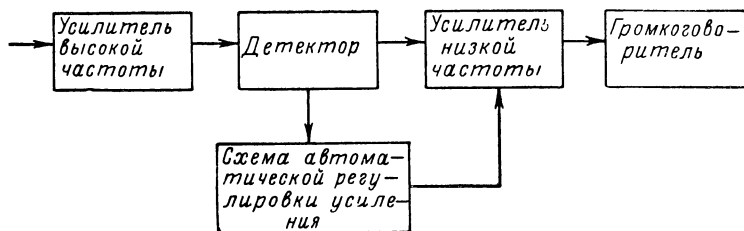


Рис. 7. Функциональная схема приемника с временной селекцией сигналов.

Если при наличии только сигнала коэффициент усиления усилителя низкой частоты равен K_c , а при поступлении помехи он уменьшился до K_n , то улучшение отношения сигнал/помеха составит K_c/K_n раз; при $K_n \rightarrow 0$ получим $K_c/K_n \rightarrow \infty$, т. е. получается большой выигрыш в соотношении сигнал/помеха при незначительном искажении сигнала.

Частотная селекция находит применение там, где можно добиться достаточно большого различия по частоте сигнала и помехи. Выбирая рабочую частоту канала связи сдвинутой относительно спектра частот помехи, мы будем улучшать соотношение сигнал/помеха. Если спектр помехи занимает полосу частот от f_1 до f_2

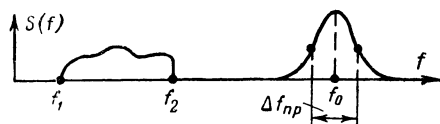


Рис. 8. Частотные характеристики сигнала и помехи.

(рис. 8), то достаточно осуществить сдвиг рабочей частоты канала f_0 на 4—5 значений полосы пропускания приемного тракта $\Delta f_{пр}$ от одной из крайних частот помехи, чтобы сигнал оказался практически очищенным от помех.

Поляризационная селекция основана на различии пространственной ориентации векторов напряженности электрического поля радиоволн сигнала и помехи. Такая селекция весьма эффективна при выделении сигналов в присутствии отражений от гидрометеоров (туман, дождь, град, снег и т. д.) и организованных пассивных помех (дипольные отражатели, сбрасываемые с самолетов).

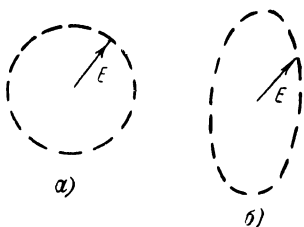


Рис. 9. Закономерности изменения вектора напряженности электрического поля электромагнитной волны.
а — волна с круговой поляризацией; б — волна с эллиптической поляризацией.

Представим себе, что решается задача управления посадкой самолета в плохих метеоусловиях. Следить за самолетом можно только с помощью радиолокационных станций, но наряду с сигналом от цели радиолокатор будет воспринимать и интенсивное отражение радиоволн от капелек влаги в атмосфере, что существенно затруднит наблюдение сигнала. Отражение от капель носит флуктуационный характер (вследствие случайности их взаимного перемещения) и представляет собой аддитивную помеху шумового типа.

Если передатчик излучает радиоволну с круговой поляризацией, то отражения от гидрометеоров или пассивных отражателей также будут иметь круговую поляризацию, а отражение от самолета — эллиптическую.



Рис. 10. Функциональная схема поляризационного селектора.

Это и позволяет осуществить селекцию. При круговой поляризации вектор напряженности электрического поля волны \vec{E} вращается с частотой f_0 вокруг направления распространения, а его модуль при этом остается постоянным (рис. 9,а). У волны с эллиптической поляризацией вектор \vec{E} также вращается с частотой излучения f_c вокруг направления распространения, но его модуль не остается постоянным, а изменяется по эллипсу (рис. 9,б).

С помощью поляризаторов, помещаемых между приемной антенной и приемником (рис. 10), волны с вращающейся поляризацией в волноводе превращаются в линейно поляризованные, у которых вектор \vec{E} занимает вполне определенное положение в плоскости, перпендикулярной оси волновода. Расположение вектора \vec{E} плоскополяризованной волны зависит от того, какую поляризацию имела волна до поляризатора: круговую или эллиптическую. На рис. 11 вектор \vec{E}_c характеризует напряженность поля линейно поляризованной волны сигнала, а \vec{E}_n — помехи. С помощью поляризационного фильтра, представляющего собой обычный прямоугольный волновод, помеха может быть отфильтрована. На рис. 11 пунктиром показано положение сечения волновода, при котором волна \vec{E}_n распространяться по

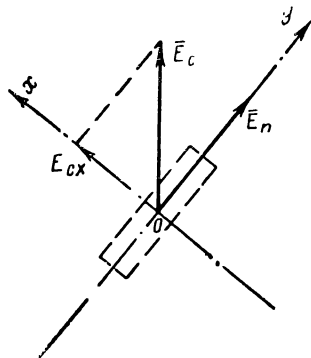


Рис. 11. Векторная диаграмма напряженностей электрического поля волн сигнала и помехи.

волноводу не будет. Сигнал же частично через такой фильтр пройдет (составляющая $E_{сх}$). При работе с подобным устройством оператор должен поворачивать вокруг оси поляризатор и фильтр до тех пор, пока помеха полностью не пропадет и не останется только сигнал. Экспериментальные данные позволяют считать, что помеха может быть ослаблена в несколько сот раз при среднем ослаблении сигнала в 5—6 раз, т. е. применение поляризационной селекции позволяет улучшить соотношение сигнал/помеха в 50—100 раз.

4. Оптимальная фильтрация сигналов

В некоторых случаях, имеющих очень важное практическое значение, сигнал и помеха не имеют существенных различий параметров, позволяющих осуществить селекцию. Именно так обстоит дело, когда мы вынуждены считаться с присутствием аддитивной помехи типа флуктуаций электрического тока или радиоизлучений из космоса. В дальнейшем такую помеху будем называть шумом.

Известно [Л. 4], что мощность собственных шумов приемника на нагрузке в 1 ом может быть рассчитана по формуле

$$P_{ш} = k_{ш} k T_0 \Delta f_{пр}, \quad (4)$$

где $k_{ш}$ — коэффициент шума приемника;

k — постоянная Больцмана, равная $1,38 \times 10^{-23} \text{ дж/град}$;

T_0 — абсолютная температура приемника, °К;

$\Delta f_{пр}$ — полоса пропускания приемного тракта.

Для средних значений величин — $k_{ш} = 10$, $T_0 = 290^\circ \text{ К}$, $\Delta f_{пр} = 1 \text{ Мгц}$ получим:

$$P_{ш} = 4 \cdot 10^{-14} \text{ вт.}$$

Мощность шумов, создаваемых радиоизлучением космоса $P_{ш.к}$, обычно характеризуется меньшими значениями.

Если мощность сигнала сопоставима или значительно меньше суммарной мощности собственных шумов приемника и космических шумов, то при наблюдении сигнала необходимо считаться с наличием аддитивной помехи. В устройствах радиосвязи обычно имеет место столь значительное превышение мощности сигнала над шума-

ми, что шумы можно не принимать во внимание. Но для радиолокации, радиоастрономии, отчасти радионавигации и некоторых других отраслей радиотехники характерно иное: шумы не только сопоставимы с сигналом, но могут во много раз превышать его по мощности на входе приемника.

Шум существует на входе приемника все время, независимо от направления и времени прихода сигналов, а также вида их поляризации; частотный диапазон шума настолько широк, что сигнал всегда лежит в его пределах, следовательно, селекция по параметрам не может быть применена для разделения сигнала и шума.

Решение задачи выделения сигнала в присутствии шума может быть найдено с помощью методов математической статистики. Выделение полезной информации оказывается возможным вследствие различия законов распределения сигнала и шума.

Для выбора основных показателей оптимального приемного устройства необходимо определить критерии, которым оно должно удовлетворять. Различным критериям будут соответствовать разные пути технической реализации оптимального фильтра и, конечно, существенно различные характеристики. Так как любому наблюдению за сигналом предшествует его обнаружение (т. е. фиксация наличия сигнала и приближенная, может быть очень грубая, оценка параметров сигнала) и именно этот процесс — первичное обнаружение — осуществляется в наиболее неблагоприятных условиях, то, как правило, критерием оптимальности приемника являются наилучшие характеристики обнаружения.

Очень часто оптимальный для обнаружения приемник используется и для разрешения обнаруженных сигналов, и для измерения их параметров. При решении этих задач характеристики приемника не всегда будут оптимальными, наилучшими. Например, если за основную задачу принять разрешение сигналов, то устройство приемника, наилучшим образом отвечающее разрешению, будет иным, чем приемника, оптимального для обнаружения. (В гл. 3 и 4 этот вопрос будет рассмотрен подробнее.)

Предположим, что приемник должен быть оптимальным для обнаружения и что на вход может поступать вполне определенный сигнал $u_c(t)$, параметры которого будут заранее известны. Если сигнал наблюдается на

фоне шума $u_{\text{ш}}(t)$, то полное входное напряжение приемника равно:

$$u(t) = u_c(t) + u_{\text{ш}}(t).$$

Оператор, контролируя выходное напряжение приемника, должен однозначно принять решение, есть ли в данный момент сигнал на входе или его нет; уклончивые ответы: «может быть», «не ясно» и др. в данном случае исключаются. Принимая то или другое решение, оператор может дать правильный ответ, но может и ошибиться.

Возможность фактического существования или отсутствия сигнала на входе приемника в данный момент может быть охарактеризована априорными (т. е. известными заранее, до опыта) вероятностями того, что сигнал есть $W(u_c)$, и того, что сигнала нет $W(0)$. Если сигнал действительно имеется и оператор скажет, что сигнал есть, то такое событие называется правильным обнаружением. Однако не исключена возможность при наличии сигнала, замаскированного или искаженного шумом, дать ответ, что сигнала нет; это событие носит название пропуска сигнала. Из-за случайности значений напряжения шума и неполного знания параметров сигнала (элемент случайности характерен и для сигнала) принятие решения оператором также носит случайный характер: имеются вероятность правильного обнаружения $W_{\text{п.о}}$ и вероятность пропуска $W_{\text{пр}}$. Так как в данной ситуации других событий быть не может (оператор должен решить либо «да», либо «нет»), они образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$W_{\text{п.о}} + W_{\text{пр}} = 1. \quad (5)$$

Двоякого рода решения могут быть и при отсутствии сигнала на входе приемника: оператор может правильно решить, что сигнала нет, — правильное необнаружение, и, приняв шум за сигнал, решить, что сигнал есть, — ложная тревога. Сумма вероятностей правильного необнаружения $W_{\text{п.н.о}}$ и ложной тревоги $W_{\text{л.т}}$ также равна единице:

$$W_{\text{п.н.о}} + W_{\text{л.т}} = 1. \quad (6)$$

Таким образом, мы видим, что в процессе обнаружения сигнала возможны четыре ситуации, из которых

две — пропуск сигнала и ложная тревога — связаны с ошибками, вызванными наличием шума. Формулы (5) и (6) показывают, что из четырех вероятностей только две являются независимыми; в качестве независимых величин принято выбирать вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги.

Естественно потребовать, чтобы оптимальное фильтрующее устройство давало максимальную вероятность принятия правильного решения при обнаружении и сводило к минимуму вероятность ошибки. Именно это является основным показателем оптимальности приемника при обнаружении. Пользуясь введенными выше понятиями, можно уточнить представление о критерии оптимальности. В соответствии с так называемым критерием идеального наблюдателя при оптимальной фильтрации должен достигаться минимум полной вероятности ошибки. Вероятности $W_{\text{пр}}$ и $W_{\text{л.т}}$ являются условными (они характеризуют события, возникающие при условии, что сигнал на входе приемника есть или его нет); возможности существования или отсутствия сигнала характеризуются безусловными априорными вероятностями $W(u_c)$ и $W(0)$. Полная вероятность ошибки будет равна:

$$W_{\text{ош}} = W(u_c) W_{\text{пр}} + W(0) W_{\text{л.т.}}$$

В соответствии с критерием идеального наблюдателя эта величина должна быть уменьшена до минимума в оптимальном приемнике.

Широкое применение находит и другой критерий оптимальности при обнаружении — критерий Неймана — Пирсона, являющийся частным случаем критерия идеального наблюдателя. В соответствии с этим критерием в оптимальном приемнике должна быть минимальной вероятность пропуска сигнала (что соответствует максимуму вероятности правильного обнаружения) при заданной вероятности ложной тревоги. Оба критерия реализуются одинаковыми техническими решениями.

Нетрудно представить себе, что вероятность ошибки (при решении вопроса о наличии или отсутствии сигнала) будет минимальной, если с помощью приемника выполняются следующие операции: определяются апостериорные [т. е. учитывающие фактически имеющееся напряжение $u(t)$ на входе приемника] вероятно-

сти того, что сигнал в данный момент есть, и того, что его нет; производится сравнение значений этих вероятностей; производится выбор события, апостериорная вероятность которого больше, и оно принимается за сообщение. Выбрав из двух возможных сообщений то, которому соответствует наибольшая вероятность, получим минимум вероятности ошибки.

5. Идеальный и достаточный приемники

Для того чтобы понять, как должен быть устроен оптимальный приемник, нужно выяснить, чем определяются апостериорные вероятности наличия и отсутствия сигнала. Будем считать, что принимаются сигналы $u_c(t)$. Если сигналов бесконечное множество, то плотность их априорного распределения (плотность априорной вероятности) будет $w(u_c)$.

Шум представляет собой нормальный процесс (т. е. распределение напряжения шума подчинено нормальному закону) со средним значением, равным нулю, и с равномерным спектром в полосе частот, значительно превышающей полосу пропускания приемника. И шум, и сигнал наблюдаются на отрезке времени T_n :

$$0 \leq t \leq T_n.$$

В соответствии с теоремой Котельникова напряжение шума $u_{ш}$ на интервале T_n может быть представлено m дискретными независимыми составляющими, причем $m = 2f_{\text{в}}T_n$, где $f_{\text{в}}$ — наивысшая частота той части спектра шума, которая проходит в приемник.

Распределение отдельной дискретной составляющей напряжения шума u_i выражается нормальным законом [Л. 5]:

$$w(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{ш}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2\sigma_{ш}^2}\right),$$

где $\sigma_{ш}^2 = P_{ш}$ — дисперсия шумового напряжения, равная мощности шума, выделяемой на сопротивлении 1 ом; эта величина считается заданной.

Совместная плотность распределения m составляющих из-за их статистической независимости равна произ-

ведению плотностей распределения отдельных дискретов:

$$w(u_1, u_2, \dots, u_m) = w(u_1) w(u_2) \dots w(u_m),$$

следовательно,

$$w(u_1, u_2, \dots, u_m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_{\text{ш}}})^m} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \sum_{i=1}^m u_i^2\right). \quad (7)$$

Это выражение может быть преобразовано к более удобному виду, если учесть некоторые соотношения.

В пределах i -го интервала времени длительностью $\Delta t = 1/2f_{\text{в}}$ напряжение шума можно приближенно считать постоянным, равным u_i . Тогда энергия шума за интервал Δt равна:

$$\int_{t_i - \Delta t}^{t_i} u_{\text{ш}}^2(t) dt = u_i^2 \Delta t = \frac{u_i^2}{2f_{\text{в}}},$$

а полная энергия шума за время $T_{\text{н}}$ равна сумме энергий отдельных составляющих:

$$\int_0^{T_{\text{н}}} u_{\text{ш}}^2(t) dt = \frac{1}{2f_{\text{в}}} \sum_{i=1}^m u_i^2.$$

Разделив левую и правую части равенства на спектральную плотность или энергию шума $E_{\text{ш}} = \sigma_{\text{ш}}^2/f_{\text{в}}$, получаем:

$$\frac{1}{2f_{\text{в}}E_{\text{ш}}} \sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_{\text{ш}}^2(t) dt$$

или

$$\frac{1}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_{\text{ш}}^2(t) dt$$

и выражение (7) видоизменяется:

$$w(u_1, u_2, \dots, u_m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_{\text{ш}}})^m} \exp\left[-\frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^T u_{\text{ш}}^2(t) dt\right]. \quad (8)$$

Теперь можно найти плотность апостериорной вероятности сигналов. В соответствии с теоремой Байеса [Л. 3] плотность апостериорной вероятности сигналов $w_u(u_c)$ пропорциональна произведению плотности априорной вероятности сигналов $w(u_c)$ на плотность распределения входного напряжения при известном сигнале $w_c(u)$:

$$w_u(u_c) = K w(u_c) w_c(u).$$

Здесь K — постоянный коэффициент, который определяется из условия нормирования функции $w_u(u_c)$: интеграл по всему множеству сигналов от плотности апостериорной вероятности равен единице:

$$\int_{u_c} w_u(u_c) du_c = 1,$$

поэтому

$$K = \frac{1}{\int_{u_c} w(u_c) w_c(u) du_c}.$$

Во входном напряжении случайным является только шум, так как любой из сигналов представляет собой вполне определенную функцию времени. Поэтому плотность распределения $w_c(u)$ может быть выражена через плотность распределения шума, в которую вместо напряжения шума следует ввести разность полного входного напряжения и напряжения сигнала, равную напряжению шума,

$$u(t) - u_c(t) = u_{\text{ш}}(t).$$

Выполнив эту подстановку, получим:

$$w_c(u) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{ш}})^m} \exp \left\{ -\frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} [u(t) - u_c(t)]^2 dt \right\}$$

и плотность апостериорной вероятности сигналов окажется равной:

$$w_u(u_c) = \frac{K w(u_c)}{(\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{ш}})^m} \exp \left\{ -\frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} [u(t) - u_c(t)]^2 dt \right\}. \quad (9)$$

Произведем некоторые преобразования полученного выражения. Во-первых, представим экспоненциальный множитель в виде трех составляющих

$$\exp \left\{ -\frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} [u(t) - u_c(t)]^2 dt \right\} = \exp \left[-\frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u^2(t) dt \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u(t) u_c(t) dt \right] \exp \left[-\frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_c^2(t) dt \right].$$

Ряд членов, которые (как будет показано ниже) выпадут из результирующих соотношений, можно объединить в общий множитель K_1 :

$$K_1 = \frac{K}{(\sqrt{2\pi\sigma_{\text{ш}}})^m} \exp \left[-\frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u^2(t) dt \right].$$

Так как $\int_0^{T_{\text{н}}} u_c^2(t) dt = E_c$ — энергия сигнала, то

$$\exp \left[-\frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_c^2(t) dt \right] = \exp \left(-\frac{E_c}{E_{\text{ш}}} \right).$$

В результате плотность апостериорной вероятности сигналов может быть выражена таким образом:

$$W_u(u_c) = K_1 W(u_c) \exp \left(-\frac{E_c}{E_{\text{ш}}} \right) \exp \left[\frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u(t) u_c(t) dt \right]. \quad (10)$$

Теперь допустим, что из множества сигналов может существовать только один вполне определенный сигнал, параметры которого полностью известны заранее. Следовательно, возможны только две ситуации: первая — заданный сигнал есть на входе приемника и вторая — сигнала на входе приемника нет. При этом следует иметь в виду уже не плотность апостериорной вероятности, а две вероятности: апостериорную вероятность наличия сигнала $W_u(u_c)$ и апостериорную вероятность его отсутствия $W_u(0)$,

Физическое обоснование возможности рассмотрения только одного сигнала вместо множества состоит в следующем. Каждое радиотехническое устройство имеет конечную разрешающую способность по любому параметру сигналов. Пусть, для разрешения по некоторому параметру X требуется различие значений этого параметра у двух или большого числа сигналов не менее чем ΔX . Тогда все те сигналы, у которых это различие меньше ΔX , будут восприниматься как один. Например, разрешающая способность радиотехнического устройства по угловой координате определяется шириной диаграммы направленности антенны. Если ширина диаграммы направленности равна θ , то раздельно будут приниматься сигналы, направления прихода которых различаются на угол, не меньший θ . В пределах же угла θ , при каком-то положении диаграммы направленности, различие сигналов по направлению их прихода исключается и вместо бесконечного множества сигналов можно говорить только об одном, параметры которого соответствуют, например, середине элемента разрешения.

Значения вероятностей $W_u(u_c)$ и $W_u(0)$ могут быть определены из выражения (10) подстановкой $u_c(t) \neq 0$ и $u_c(t) = 0$, а также введением априорных вероятностей $W(u_c)$ и $W(0)$.

Апостериорная вероятность наличия сигнала соответствует условию $u_c(t) \neq 0$:

$$W_u(u_c) = K_1 w(u_c) \exp\left(-\frac{E_c}{E_{\text{ш}}}\right) \exp\left[\frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{п}}} u(t) u_c(t) dt\right]; \quad (10a)$$

для апостериорной вероятности отсутствия сигнала $u_c(t) = 0$, $E_c = 0$ и $W_u(0) = K_1 W(0)$.

В приемнике, который мы назовем идеальным, нужно было бы образовывать величины $W_u(u_c)$ и $W_u(0)$ и сравнивать их значения между собой; если $W_u(u_c) > W_u(0)$, то принималось бы решение о наличии сигнала, при $W_u(u_c) < W_u(0)$ — решение об отсутствии сигнала. Как видно из полученных выражений, операции в идеальном приемнике оказываются достаточно сложными.

Однако задача оптимального приемника может быть существенно упрощена. Для принятия решения достаточ-

но сравнивать между собой значения каких-либо монотонных функций вероятностей $W_u(u_c)$ и $W_u(0)$. Если оперировать натуральными логарифмами этих величин, то вид функций, требующих физической реализации, получается весьма простым:

$$\left. \begin{aligned} \ln W_u(u_c) &= \ln K_1 + \ln W(u_c) - \\ &- \frac{E_c}{E_m} + \frac{2}{E_m} \int_0^{T_H} u(t) u_c(t) dt \\ \text{и} \\ \ln W_u(0) &= \ln K_1 + \ln W(0). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Сравнивая два последних выражения, получаем:

$$\ln K_1 + \ln W(u_c) - \frac{E_c}{E_m} + \frac{2}{E_m} \int_0^{T_H} u(t) u_c(t) dt \lesseqgtr \ln K_1 + \ln W(0)$$

или

$$\frac{2}{E_m} \int_0^{T_H} u(t) u_c(t) dt \lesseqgtr \frac{E_c}{E_m} + \ln \frac{W(0)}{W(u_c)}.$$

Таким образом, сравнению значений величин $\ln W_u(u_c)$ и $\ln W_u(0)$ равнозначно сравнение величин A_1 и A_2 :

$$A_1 = \frac{2}{E_m} \int_0^{T_H} u(t) u_c(t) dt$$

и

$$A_2 = \frac{E_c}{E_m} + \ln \frac{W(0)}{W(u_c)}.$$

Если $A_1 > A_2$, то апостериорная вероятность наличия сигнала больше и принимается решение о том, что сигнал есть; наоборот, условие $A_1 < A_2$ соответствует тому, что больше апостериорная вероятность отсутствия сигнала и соответственно будет принято решение — сигнала нет.

Приемник, в котором осуществляется образование и сравнение величин A_1 и A_2 , называется **д о с т а т о ч н ы м**.

Достаточный приемник (так же, как и идеальный) является оптимальным при обнаружении, так как он позволяет реализовать критерий оптимальности — обеспечить минимум вероятности ошибки при принятии решения о наличии сигнала.

Проанализируем сущность операций, которые должны быть выполнены в приемнике со смесью сигнала и шума. Входное напряжение $u(t)$ перемножается с опорным $u_{оп}(t)$, являющимся копией принимаемого сигнала. Если сигнал поступает на вход приемника в момент t , и на его распространение в пространстве от источника сообщения до приемника потребовалось время τ , то опорное напряжение должно быть копией напряжения сигнала, соответствующего моменту времени $(t-\tau)$, т. е. $u_{оп}(t) = u_c(t-\tau)$.

В соответствии с постановкой задачи мы предполагаем, что параметры электрического колебания, характеризующего принимаемый сигнал, известны заранее и копию сигнала образовать не представляет труда; неопределенность состоит в незнании того, есть сигнал на входе приемника сейчас, в данный момент, или он отсутствует.

Произведение $u(t)u_c(t-\tau)$ интегрируется за время существования сигнала. С учетом постоянного множителя $(2/E_{ш})$ выходное напряжение интегратора пропорционально величине

$$U_{вых} = \alpha \frac{2}{E_{ш}} \int_0^{T_H} u(t) u_c(t-\tau) dt, \quad (11a)$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Интеграл вида $\int_{t_0}^{t_0+T_H} u(t) u_c(t-\tau) dt$ с точностью до по-

стоянного множителя совпадает с выражением для функции взаимной корреляции между входным напряжением $u(t)$ и сигналом $u_c(t-\tau)$. Как известно [Л. 3], функция взаимной корреляции характеризует соответствие временной структуры двух стационарных случайных процессов; в данном случае случайным является только один из процессов $u(t)$, а второй $u_c(t-\tau)$ представляет собой вполне определенную функцию времени. Если бы перед интегралом стоял множитель $1/T_H$, т. е.

образовывалась бы функция

$$\frac{1}{T_{\text{н}}} \int_{t_0}^{t_0+T_{\text{н}}} u(t) u_c(t - \tau) dt,$$

то она представляла бы собой точное выражение функции корреляции за конечное время усреднения $T_{\text{н}}$.

Можно считать, что в оптимальном приемнике оценивается мера «взаимной корреляции» между входным напряжением и полезным сигналом. В соответствии с этим и приемник называют корреляционным.

От интегратора выходное напряжение поступает в пороговое устройство, где происходит сравнение с так называемым пороговым напряжением (порогом) $U_{\text{пор}}$, пропорциональным величине A_2 ,

$$U_{\text{пор}} = \alpha \left[\frac{E_c}{E_{\text{ш}}} + \ln \frac{W(0)}{W(u_c)} \right].$$

Значения величин E_c , $E_{\text{ш}}$, $W(0)$ и $W(u_c)$ следует считать известными заранее, поэтому значение порога $U_{\text{пор}}$ будет каким-то определенным.

При сравнении напряжений $U_{\text{вых}}$ и $U_{\text{пор}}$ превышение порогового уровня ($U_{\text{вых}} > U_{\text{пор}}$) считают равнозначным присутствию сигнала; если же порог не будет превышен выходным напряжением ($U_{\text{вых}} < U_{\text{пор}}$), то считается, что сигнала нет.

Функциональная схема достаточного оптимального приемника, иллюстрирующая изложенные идеи, приведена на рис. 12. Рассмотренный вариант построения оптимального приемника может быть назван активным фильтром, так как для обеспечения его работы необходим генератор опорного напряжения. Можно реализовать идею корреляционного приема с помощью пассивного фильтра, согласованного с сигналом [Л. 1]. Для сигнала $u_c(t)$ согласованным является фильтр, имеющий такую передаточную функцию, которая с точностью до амплитудного множителя и постоянной задержки во времени является комплексно сопряженной со спектром сигнала. Если спектр сигнала

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_c(t) e^{-j\omega t} dt,$$

то передаточная функция согласованного фильтра будет:

$$K(j\omega) = ke^{-j\omega\tau_0} S(-j\omega) = ke^{-j\omega\tau_0} S^*(j\omega),$$

где k — амплитудный множитель;

$e^{-j\omega\tau_0}$ — член, характеризующий постоянную временную задержку сигнала в фильтре τ_0 ;

$S^*(j\omega)$ — величина, комплексно сопряженная со спектром сигнала.

Напряжение на выходе согласованного с сигналом фильтра также будет пропорционально функции взаим-

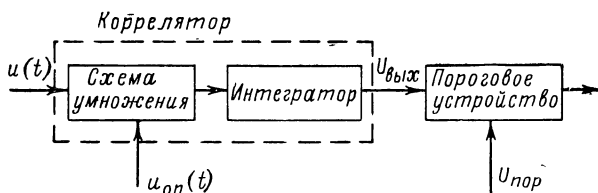


Рис. 12. Функциональная схема оптимального достаточного приемника для обнаружения полностью известного сигнала.

ной корреляции входного напряжения и сигнала. Известно [Л. 1], что выходное напряжение фильтра определяется интегралом от произведения входного напряжения на импульсную характеристику фильтра $h(t)$:

$$u_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau - t) h(t) dt.$$

Если фильтр согласован с сигналом $u_c(t)$, то его импульсная характеристика будет:

$$h(t) = \gamma u_c(\tau_0 - t),$$

где γ — постоянный амплитудный множитель;

τ_0 — постоянная временная задержка.

Как видно, $h(t)$ представляет собой зеркальное отображение сигнала. Графики на рис. 13 поясняют вид

импульсной характеристики согласованного фильтра: сигнал на входе фильтра $u_c(t)$, его зеркальное отображение относительно момента $t=0$ изображено графиком $u_c(-t)$, а импульсная характеристика фильтра $h(t)$ представляет собой зеркальное отображение сигнала, сдвинутое на величину τ_0 по оси времени.

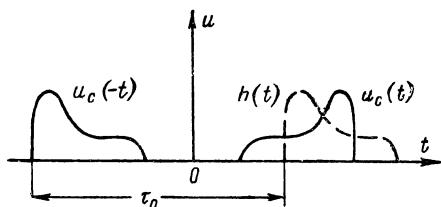


Рис. 13. Импульсная характеристика согласованного с сигналом фильтра.

Учитывая вид импульсной характеристики фильтра, получим:

$$u_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \int_0^{\infty} u(\tau - t) u_c(\tau_0 - t) dt.$$

Так как сигнал длится только время T_n , то

$$u_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \int_{t_0}^{t_0 + T_n} u(\tau - t) u_c(\tau_0 - t) dt. \quad (12)$$

Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов и не меняется при перемене аргументов t и τ местами, следовательно, сигналы на выходе активного и пассивного фильтров совершенно идентичны; постоянный сдвиг на время τ_0 не имеет принципиального значения. При использовании пассивного фильтра опорным напряжением служат собственные колебания, образующиеся в контуре под внешним воздействием; интегрирование проявляется в постепенном нарастании амплитуды вынужденных колебаний при согласованности сигнала и фильтра.

6. Выходные сигналы достаточного приемника

При использовании, например, активного фильтра в соответствии с выражением (11а) будем полагать выходное напряжение приемника равным

$$u_{\text{вых}}(\tau) = \alpha \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u(t) u_{\text{с}}(t - \tau) dt.$$

Выходное напряжение можно рассматривать как сумму двух составляющих:

$$u_{\text{вых}}(\tau) = \alpha S(\tau) + \alpha H(\tau),$$

причем

$$S(\tau) = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_{\text{с}}(t) u_{\text{с}}(t - \tau) dt$$

есть сигнальная функция, пропорциональная автокорреляционной функции входного сигнала, а

$$H(\tau) = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_{\text{ш}}(t) u_{\text{с}}(t - \tau) dt$$

есть шумовая функция, пропорциональная функции взаимной корреляции сигнала и шума. Сигнальная функция характеризует полезный сигнал на выходе фильтра; она является аналитической функцией времени τ . Здесь для времени приходится ввести обозначение τ , так как после интегрирования по переменной t последняя будет исключена, и зависимость от времени будет определяться временным сдвигом τ .

Максимальное значение сигнальной функции пропорционально удвоенному значению отношения энергии входного сигнала к энергии шума. Максимальному значению функции соответствует равенство нулю временного сдвига между обоими напряжениями. При $\tau=0$

$$\int_0^{T_{\text{н}}} u_{\text{с}}^2(t) dt = E_{\text{с}}$$

$$S(\tau)_{\text{макс}} = \frac{2E_c}{E_{\text{ш}}} = R.$$

Ввиду большого значения, которое имеет сигнальная функция при оптимальной фильтрации, целесообразно на конкретном примере рассмотреть особенности ее вычисления и проанализировать характер этой функции.

В качестве примера вычислим сигнальную функцию для фильтра, согласованного с высокочастотным сигналом гауссовой формы. В радиотехнической аппаратуре находят применение сигналы самой различной формы: прямоугольные, треугольные, косинусоидальные, экспоненциальные, гауссовы. В настоящей работе чаще всего используются сигналы гауссовой формы, так как это позволяет упростить математические выкладки без потери общности получаемых результатов.

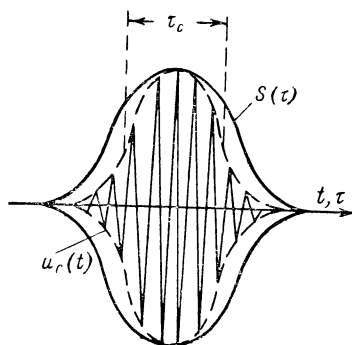


Рис. 14. Сигнальная функция при сигнале гауссовой формы.

Пусть на входе приемника имеется сигнал в виде импульса гауссовой формы (рис. 14):

$$u_c(t) = A_0 \exp(-\gamma^2 t^2) \cos \omega t,$$

где $\gamma = \sqrt{\pi}/\tau_c$ — коэффициент, характеризующий скорость изменения огибающей сигнала;
 τ_c — длительность сигнала на уровне 0,46 от максимума.

При такой нормировке γ совпадает со значением эффективной ширины энергетического спектра сигнала. Сигнальная функция

$$S(\tau) = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \exp(-\gamma^2 t^2) \cos \omega t A_0 \exp[-\gamma^2 (t - \tau)^2] \times \\ \times \cos \omega (t - \tau) dt.$$

Так как $\cos a \cos b = -\frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$, то рассматриваемый интеграл распадается на два:

$$S(\tau) = \frac{A_0^2}{E_{\text{ш}}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma^2 t^2 - \gamma^2 (t - \tau)^2] \cos \omega \tau dt + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma^2 t^2 - \gamma^2 (t - \tau)^2] \cos(2\omega t - \omega \tau) dt \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$-\gamma^2 t^2 - \gamma^2 (t - \tau)^2 = -\frac{\gamma^2 \tau^2}{2} - 2\gamma^2 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2$$

и первый член в фигурных скобках будет выглядеть следующим образом:

$$\exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \cos \omega \tau \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-2\gamma^2 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2\right] dt.$$

Полученный интеграл является табличным [Л. 6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-2\gamma^2 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2\right] dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\gamma} = \frac{\tau_c}{\sqrt{2}}.$$

Значение второго интеграла ничтожно мало по сравнению с первым, и его значением можно пренебречь, так как

$$\exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-2\gamma^2 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2\right] \cos(2\omega t - \omega \tau) dt = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\gamma} \exp\left[-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right] \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau_c^2}{2\pi}\right),$$

а $\omega^2 \tau_c^2 \gg 1$ и поэтому $\exp\left(-\frac{\omega^2 \tau_c^2}{2\pi}\right) \rightarrow 0$. Учитывая выполненные преобразования, получаем:

$$S(\tau) = \frac{A_0^2 \tau_c}{\sqrt{2} E_{\text{ш}}} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \cos \omega \tau.$$

Но $A_0^2 \tau_c / \sqrt{2} = 2E_c$ для сигнала гауссовой формы, поэтому окончательно

$$S(\tau) = \frac{2E_c}{E_{\text{ш}}} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \cos \omega \tau,$$

т. е. выходной сигнал также имеет гауссову огибающую с частотным заполнением ω ; его амплитуда пропорциональна удвоенному отношению сигнал/шум по энергии, а длительность несколько превышает длительность входного сигнала. Огибающая выходного сигнала изображена на рис. 14 сплошной линией.

Шумовая функция является функцией случайной. Ее значения для любого заданного τ распределены по нормальному закону со средним значением, равным нулю, и дисперсией [Л. 5]

$$\sigma_{\text{н}}^2 = \frac{2E_c}{E_{\text{ш}}} = R.$$

Отношение максимальной амплитуды выходного напряжения сигнала к среднему квадратическому значению напряжения шумовой составляющей на выходе фильтра равно корню квадратному из удвоенного отношения энергии сигнала к энергии шума:

$$\frac{S(\tau)_{\text{макс}}}{\sigma_{\text{н}}} = \frac{2E_c}{E_{\text{ш}}} : \sqrt{\frac{2E_c}{E_{\text{ш}}}} = \sqrt{\frac{2E_c}{E_{\text{ш}}}}.$$

Задача дальнейшего изложения состоит в том, чтобы показать, как же извлекается информация из выходного напряжения приемника.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

7. Обнаружение сигналов с полностью известными параметрами

Вводные замечания. Рассмотрим характеристики обнаружения сигналов с помощью достаточного оптимального приемника.

Выше отмечалось, что при обнаружении возможны четыре ситуации, характеризующиеся соответствующими вероятностями, из которых независимых только две; за независимые принято принимать вероятности правильного обнаружения $W_{п.о}$ и

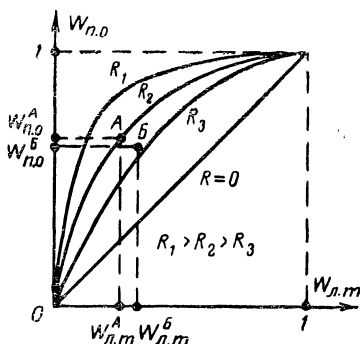


Рис. 15. Примерный вид рабочих характеристик приемника.

ложной тревоги $W_{л.т}$. Эффективность обнаружения оценивают с помощью рабочих характеристик приемника (РХП), представляющих собой графики зависимости вероятности правильного обнаружения от вероятности ложной тревоги; параметром семейства кривых является энергетическое отношение сигнал/шум.

Рабочие характеристики приемника позволяют определить требования к энергии принимаемых сигналов по заданным значениям $W_{п.о}$ и $W_{л.т}$ и известной спектральной плотности шума.

На рис. 15 приведены три рабочие характеристики приемника, соответствующие трем значениям отношения сигнал/шум $R=2E_c/E_{ш}$: наибольшим является значение

R_1 , а наименьшим — R_3 . Если сигнал отсутствует, т. е. $R=0$, то рабочая характеристика превращается в прямую, соединяющую начало координат с точкой, которая имеет координаты $W_{п.о}=1$ и $W_{л.т}=1$.

Рабочие характеристики показывают, что при заданном соотношении сигнал/шум любому значению одной из вероятностей соответствует вполне определенное значение другой вероятности. Чем больше отношение сигнал/шум, тем большей будет вероятность правильного обнаружения при заданной вероятности ложной тревоги и наоборот, с увеличением R будет уменьшаться вероятность ложной тревоги при заданном значении вероятности правильного обнаружения. При заданном значении отношения сигнал/шум переход из одной точки рабочей характеристики в другую связан с изменением порогового напряжения. При уменьшении порога обе вероятности возрастают; увеличение порога приводит к уменьшению вероятностей и при бесконечно большом пороге $W_{п.о}=0$ и $W_{л.т}=0$.

Оптимальность приемника по обнаружению состоит в том, что при заданном значении отношения сигнал/шум R получают наибольшее возможное значение $W_{п.о}$ и наименьшее значение $W_{л.т}$. Если, например, при $R=R_2$ в оптимальном приемнике обнаружение сигнала характеризуется точкой A (см. рис. 15) и имеют место значения вероятностей $W_{п.о}^A$ и $W_{л.т}^A$, то при использовании любого, неоптимального приемника вероятностные характеристики обнаружения будут определяться точкой B , лежащей ниже и правее точки A ; т. е. характеристики обнаружения неоптимального приемника будут хуже, чем оптимального, так как $W_{п.о}^B < W_{п.о}^A$ и $W_{л.т}^B > W_{л.т}^A$.

Характеристики обнаружения в большой степени зависят от объема априорных знаний о принимаемом сигнале: чем больше априорные знания, тем лучше характеристики обнаружения. Пусть например, напряжение сигнала на входе приемника равно:

$$u_c(t) = A \cos(\omega t + \psi).$$

Можно представить себе много ситуаций, характеризующих априорные знания о сигнале: неизвестна только амплитуда; неизвестны и амплитуда, и частота; неизвестна частота и т. д. Из всех возможных мы будем анализировать пять ситуаций:

а) заранее известны все параметры сигнала — амплитуда A , начальная фаза ψ и частота ω ; неизвестен лишь факт присутствия сигнала в данный момент;

б) неизвестна начальная фаза сигнала;

в) неизвестны начальная фаза и амплитуда;

г) неизвестны начальная фаза, амплитуда и частота;

д) сигнал занимает одно из m положений.

На практике наибольшее значение имеет ситуация, характеризующаяся тем, что значения всех параметров сигнала заранее неизвестны и уточняются в процессе обработки входного напряжения приемника.

Но математический анализ этого случая опирается на результаты исследования всех предыдущих. Полезно также представлять себе влияние на характеристики обнаружения каждого фактора в отдельности. Поэтому мы пройдем весь путь исследования рабочих характеристик приемника, начиная с обнаружения полностью известного сигнала.

Обнаружение сигнала с полностью известными параметрами для практики использования радиотехнических приборов — событие, конечно, нереальное. Невозможно представить себе ситуацию, в которой заранее были бы абсолютно точно известны взаимное положение источни-

ка излучения и приемника, время распространения радиоволны, свойства среды и другие факторы, влияющие на значения параметров сигнала. Однако полезность анализа этого случая состоит в получении теоретически предельных, наилучших характеристик обнаружения, с которыми могут быть сравнены все остальные.

Аналитическое выражение рабочих характеристик приемника. Анализ, выполненный в гл. 1, относился к обнаружению именно сигнала с полностью известными пара-

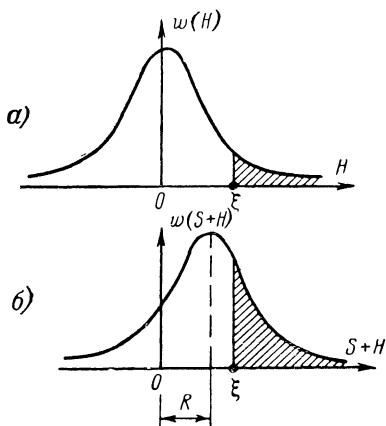


Рис. 16. К определению вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги.

а — плотность распределения шумовой функции; б — плотность распределения суммы сигнальной и шумовой функций.

метрами. Приемник, схема которого приведена на рис. 12, является оптимальным при обнаружении полностью известного сигнала. Теперь требуется найти аналитическое выражение рабочих характеристик приемника при обнаружении полностью известного сигнала.

В соответствии с принципом действия приемника ложной тревогой мы будем называть превышение порога выходным напряжением интегратора при условии, что сигнала на входе приемника нет. В этом случае выходное напряжение определяется только шумовой составляющей [$u_c(t)=0$, поэтому и $S(\tau)=0$] и ложная тревога аналитически может быть выражена следующим образом:

$$U_{\text{вых}} = \alpha H(\tau) > U_{\text{пор}}$$

или

$$H(\tau) > \frac{E_c}{E_{\text{ш}}} + \ln \frac{W(0)}{W(u_c)}.$$

Плотность распределения значений шумовой функции характеризуется нормальным законом со средним значением, равным нулю, и дисперсией $\sigma_H^2 = R = 2E_c/E_{\text{ш}}$:

$$w(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \exp\left(-\frac{H^2}{2R}\right).$$

График функции $w(H)$ изображен на рис. 16,а. Если безразмерное значение порога обозначить ξ , т. е. $\xi = \frac{E_c}{E_{\text{ш}}} + \ln \frac{W(0)}{W(u_c)}$, то вероятность ложной тревоги будет равна определенному интегралу от плотности распределения $w(H)$ в пределах от ξ до ∞ :

$$W_{\text{л.т}} = \int_{\xi}^{\infty} w(H) dH = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\frac{H^2}{2R}\right) dH.$$

На графике рис. 16,а вероятность ложной тревоги характеризуется заштрихованной площадью под кривой $w(H)$. Интересующий нас интеграл может быть выражен через функцию Лапласа

$$W_{\text{л.т}} = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{2R}}\right) \right], \quad (13)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Правильное обнаружение будет соответствовать превышению порога выходным напряжением интегратора при условии, что сигнал имеется на входе приемника, т. е.

$$U_{\text{вых}} = \alpha [S(\tau) + H(\tau)] > U_{\text{пор}}$$

или

$$S(\tau) + H(\tau) > \frac{E_c}{E_{\text{ш}}} + \ln \frac{W(0)}{W(u_c)}.$$

В сумме $[S(\tau) + H(\tau)]$ случайной составляющей является только $H(\tau)$, поэтому плотность распределения суммы характеризуется также нормальным законом. Незменным останется и значение дисперсии процесса $\sigma_{S+H}^2 = R$; но среднее значение процесса из-за наличия $S(\tau)$ изменится, оно будет равно R . Следовательно,

$$w(S+H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \exp \left\{ -\frac{[(S+H)-R]^2}{2R} \right\}.$$

График функции $w(S+H)$ изображен на рис. 16,б.

Вероятность правильного обнаружения равна:

$$\begin{aligned} W_{\text{п.о}} &= \int_{\xi}^{\infty} w(S+H) d(S+H) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \int_{\xi}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{[(S+H)-R]^2}{2R} \right\} d(S+H). \end{aligned}$$

На графике рис. 16,б вероятность правильного обнаружения изображается площадью заштрихованной области. И здесь определенный интеграл может быть выражен через функцию Лапласа, что даст

$$W_{\text{п.о}} = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{\xi - R}{\sqrt{2R}} \right) \right]. \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) позволяют рассчитать вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги (и построить рабочие характеристики приемника) по задан-

ным значениям отношения сигнал/шум и априорных вероятностей $W(0)$ и $W(u_c)$; функция Лапласа табулирована, ее значения приведены, например, в приложении 1 в книге Вентцеля [Л. 3].

Пусть, например, $R=20$ и $W(0)=W(u_c)=\frac{1}{2}$, следовательно, $\xi=10$. При этом

$$W_{л.т} = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{10}{\sqrt{40}} \right) \right] = \frac{1}{2} [1 - \Phi(1,58)],$$

$$\Phi(1,58) = 0,9728 \text{ и } W_{л.т} = 0,0136.$$

$W_{п.о} = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{10-20}{\sqrt{40}} \right) \right]$. Так как $\Phi(x)$ функция нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то

$$W_{п.о} = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{10}{\sqrt{40}} \right) \right] = \frac{1}{2} [1 + \Phi(1,58)] = 0,9864.$$

Формулами (13) и (14) удобно пользоваться в тех случаях, когда значения рассматриваемых вероятностей превышают 10^{-3} — 10^{-4} . Однако на практике приходится иметь дело с вероятностью ложной тревоги, меньшей указанных значений ($W_{л.т} \approx 10^{-6} \div 10^{-8}$); при этом вероятность правильного обнаружения бывает велика (0,9 и более). При таких условиях для расчетов удобно использовать приближенную формулу, связывающую значения R , $W_{п.о}$ и $W_{л.т}$ (см. [Л. 7]),

$$R = 2 \left(\sqrt{\ln \frac{1}{W_{л.т}} - 1,4} + \sqrt{\ln \frac{1}{1 - W_{п.о}} - 1,4} \right)^2. \quad (15)$$

Формула (15) очень удобна для определения требуемого отношения сигнал/шум на входе приемника по заданным значениям вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги. Если $W_{п.о} \geq 0,9$ и $W_{л.т} \leq 0,1$, то ошибка расчетов R не превышает 15%.

Пусть требуется обеспечить получение $W_{п.о} = 0,9864$ и $W_{л.т} = 0,0136$ (цифры из предыдущего примера). Требуемое соотношение сигнала и шума $R_{тр} = 23$, что на 15% отличается от значения R , полученного выше.

На рис. 17 сплошными линиями нанесены рассчитанные рабочие характеристики оптимального приемника при обнаружении полностью известного сигнала. Вы-

бранный масштаб по обеим осям обеспечивает удобство отсчета значений вероятностей $W_{п.о}$ и $W_{л.т}$ при их изменении в широких пределах.

До сих пор мы рассматривали обнаружение одиночного сигнала, а на практике часто осуществляется обнаружение группы из N_c элементарных сигналов. Что же изменится в схеме приемника и в методах расчетов его характеристик в случае приема группы сигналов?

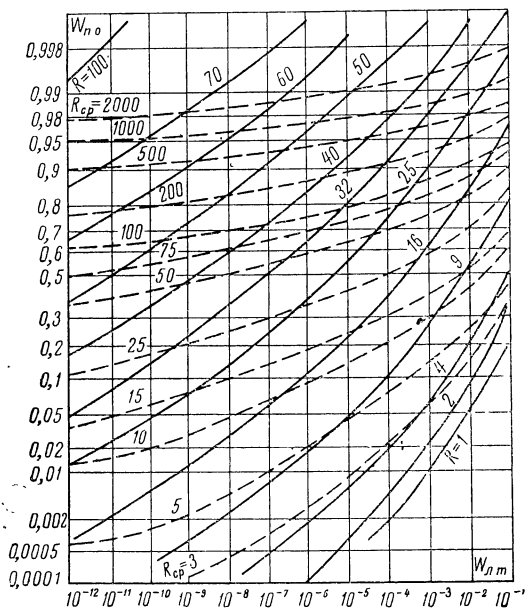


Рис. 17. Рабочие характеристики приемника.

— обнаружение полностью известного сигнала;
 - - - - обнаружение сигнала с неизвестной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой.

Формулы (13), (14) и (15) справедливы для сигнала любого вида, в том числе и для группы элементарных сигналов. Но при приеме N_c сигналов необходимо учитывать суммарное значение отношения сигнал/шум, равное

$$R_{\Sigma} = N_c R_1,$$

где $R_1 = 2E_c/E_{ш}$ — отношение сигнал/шум для одиночного элементарного сигнала.

Примерный вид группы сигналов изображен на рис. 18, а, где τ_a — длительность элементарных сигналов, T_0 — интервал между сигналами.

При обнаружении группового сигнала формулы (13), (14) и (15) будут связывать значения вероятностей пра-

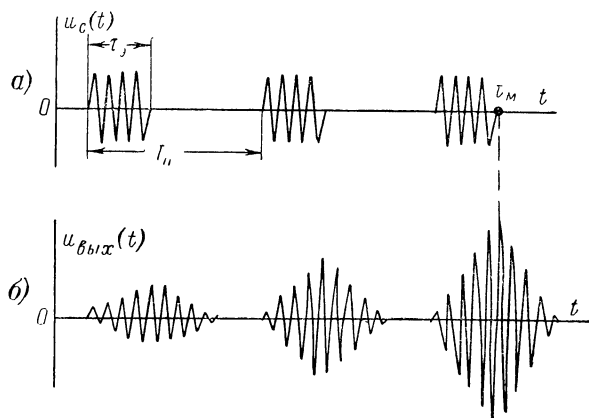


Рис. 18. Накопление высокочастотных сигналов.

а — входные сигналы; б — напряжения на выходе схемы суммирования.

вильного обнаружения и ложной тревоги с суммарным значением соотношения сигнала и шума.

В приемнике, оптимальном для группы известных сигналов, должно обеспечиваться суммирование резуль-

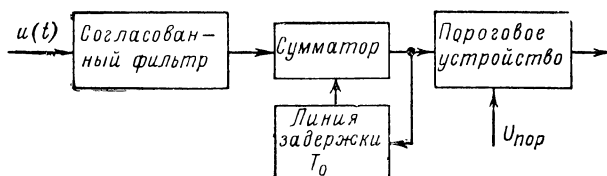


Рис. 19. Функциональная схема достаточного приемника для обнаружения группы полностью известных сигналов.

татов обработки отдельных элементарных сигналов. И это суммирование должно осуществляться с учетом фазы высокочастотного заполнения, что позволит в наибольшей степени увеличить отношение сигнал/шум.

Один из вариантов блок-схемы оптимального приемника приведен на рис. 19. Входное напряжение подво-

дится к фильтру, согласованному с элементарным сигналом. От фильтра напряжение подводится к суммирующему устройству, снабженному цепью обратной связи: с выхода сумматора напряжение через линию задержки подается обратно на его вход. Постоянная времени линии задержки точно равна интервалу между элементарными сигналами T_0 . В таком устройстве амплитуда выходного напряжения будет нарастать пропорционально числу накапливаемых сигналов. Сигнальная функция, образовавшаяся при прохождении первого сигнала через согласованный фильтр, после задержки на время T_0 сложится в фазе с сигнальной функцией от второго сигнала; на эту сумму в фазе наложится сигнальная функция третьего сигнала и т. д. Указанный процесс иллюстрируется графиками на рис. 18,б. В тот момент, когда сигнальная функция на выходе сумматора достигнет максимального значения (t_m), следует произвести сравнение выходного напряжения с порогом.

Выше (в гл. 1) было показано, что наибольшее значение сигнальной функции одиночного сигнала равно удвоенному значению отношения сигнал/шум. Максимальное значение сигнальной функции на выходе сумматора будет в N_c раз больше, т. е.

$$S(\tau)_\Sigma = N_c \frac{2E_c}{E_{\text{ш}}} = N_c R_1.$$

Шумовая составляющая выходного напряжения системы обработки тоже будет увеличиваться при накоплении сигналов. Но шум будет нарастать медленнее сигнала, так как шум из-за случайности фазы суммируется по мощности, а не по амплитуде, т. е. суммарная дисперсия шума возрастает на выходе сумматора в N_c раз,

$$\sigma_{H\Sigma}^2 = N_c \sigma_H^2,$$

а среднее квадратическое значение шумовой составляющей увеличится в $\sqrt{N_c}$ раз:

$$\sigma_{H\Sigma} = \sqrt{N_c} \sigma_H,$$

где $\sigma_H = \sqrt{R_1}$.

Таким образом отношение напряжений сигнала и шума на выходе системы обработки возрастет в $\sqrt{N_c}$ раз:

$$\frac{S(\tau)_\Sigma}{\sigma_{H\Sigma}} = \frac{N_c R_1}{\sqrt{N_c} R_1} = \sqrt{N_c},$$

что соответствует увеличению соотношения сигнал/шум на входе приемника в N_c раз. Следовательно, мы можем считать, что при приеме N_c полностью известных сигналов, характеризующихся каждый отношением сигнал/шум R_1 , результирующее отношение сигнал/шум увеличивается в N_c раз:

$$R_z = N_c R_1. \quad (16)$$

Именно это значение отношения сигнал/шум будет определять вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги при обнаружения пачки сигналов.

8. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами

Обнаружение сигнала с неизвестной начальной фазой.

Прежде всего рассмотрим обнаружение сигнала с неизвестной начальной фазой. Будем считать, что фаза подвержена случайным изменениям и с равной вероятностью может принять любое значение в пределах от 0 до 2π , т. е. плотность априорного распределения ψ равна:

$$\omega(\psi) = \frac{1}{2\pi}.$$

Когда говорят о полностью известном сигнале, то предполагают, что в любой момент времени t фаза колебания точно известна. При незнании начальной фазы мы не можем точно указать фазу колебания в любой произвольный момент времени t . Если известна структура высокочастотного заполнения сигнала за исключением начальной фазы, то это значит, что положение сигнала на временной оси (t) определено с точностью до периода высокой частоты.

В реальных условиях приема радиосигналов никогда нельзя заранее знать их начальную фазу. Если бы даже можно было совершенно точно контролировать значения параметров радиоволн источника излучения, то фаза колебания на входе приемника всегда будет иметь случайную составляющую, обусловленную флуктуациями траектории распространения волн в пространстве и случайными изменениями расстояния между источником излучения и приемником.

При обнаружении сигнала с неизвестной начальной фазой устройство и характеристики оптимального приемника несколько изменяются.

Данные для выбора схемы оптимального приемника опять-таки могут быть получены из анализа выражения, определяющего плотность апостериорного распределения сигналов.

В рассматриваемом случае плотность апостериорной вероятности сигналов (см. § 5) будет функцией двух случайных аргументов — сигнала u_c и его начальной фазы ψ . При некотором данном значении ψ

$$w_u(u_c) = K_1 w(u_c) \exp\left(-\frac{E_c}{E_{\text{ш}}}\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u(t) u_c(t) dt\right].$$

Ввиду случайности изменений фазы является величиной, не несущей информации и в этом отношении бесполезной. От такой величины можно избавиться путем усреднения $w_u(u_c, \psi)$ по всем возможным значениям ψ .

Операции усреднения, как известно, записываются следующим образом:

$$\int_{\psi_{\text{мин}}}^{\psi_{\text{макс}}} w_u(u_c, \psi) w(\psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_u(u_c, \psi) d\psi.$$

Если выполнить интегрирование и снова перейти от плотности распределения к апостериорным вероятностям наличия и отсутствия одного единственного сигнала, то получим следующие равенства:

$$W_u(u_c) = K_1 W(u_c) \exp\left(-\frac{E_c}{E_{\text{ш}}}\right) I_0(M),$$

$$W_u(0) = K_1 W(0).$$

Здесь I_0 — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента;

$$M = \frac{2A}{E_{\text{ш}}} \sqrt{\left[\int_0^{T_{\text{н}}} u(t) \cos \omega t dt\right]^2 + \left[\int_0^{T_{\text{н}}} u(t) \sin \omega t dt\right]^2};$$

A — амплитуда сигнала.

В соответствии с этими результатами для решения задачи обнаружения в достаточном приемнике необхо-

димом образовать функцию $\ln I_0(M)$ и сравнить ее значение с порогом

$$\xi = \frac{E_c}{E_{\text{ш}}} + \ln \frac{W(0)}{W(u_c)}.$$

При $M \gg 1$, что соответствует большому значению отношения сигнал/шум, логарифм функции Бесселя приближенно равен самому аргументу:

$$\ln I_0(M) \approx M;$$

если же $M \ll 1$ (т. е. $E_c/E_{\text{ш}} \ll 1$), то логарифм функции Бесселя аппроксимируется квадратом половины аргумента:

$$\ln I_0(M) \approx \frac{M^2}{4}.$$

Имея в виду малое отношение сигнал/шум, примем второй вариант аппроксимации.

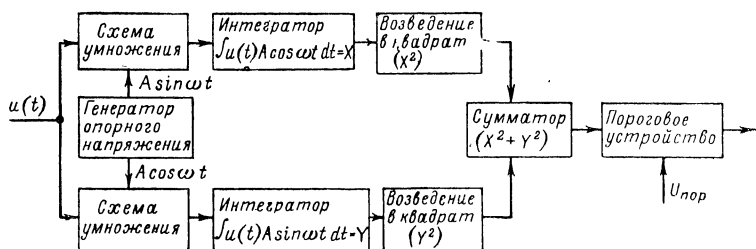


Рис. 20. Функциональная схема достаточного корреляционного приемника для обнаружения сигнала с неизвестной начальной фазой.

Теперь нетрудно представить себе функциональную схему оптимального приемника (рис. 20). Входное напряжение приемника $u(t)$ должно подводиться к двум схемам умножения; опорное напряжение в одной из них равно $A \cos \omega t$, а во второй $A \sin \omega t$. После каждой из схем умножения имеется интегратор с временем интегрирования $T_{\text{н}}$. Результаты интегрирования X и Y возводятся в квадрат и суммируются, а сумма $X^2 + Y^2$ сравнивается с порогом $\xi = U_{\text{пор}}/\alpha$.

Физический смысл таких преобразований очевиден: они показывают, что создается постоянство максимального значения сигнальной функции на выходе системы обработки независимо от значения начальной

фазы сигнала на входе приемника. Убедимся в этом. Если входной сигнал $u_c(t) = A \cos(\omega t + \psi)$, то в одном канале системы обработки максимальное значение сигнальной функции будет равно:

$$S_x(\tau)_{\text{макс}} = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} A \cos(\omega t + \psi) A \cos \omega t \cdot dt = \frac{2E_c}{E_{\text{ш}}} \cos \psi$$

(при выполнении интегрирования следует пренебречь членами, имеющими множитель $1/\omega$ вследствие их малости) а во втором канале

$$S_y(\tau)_{\text{макс}} = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} A \cos(\omega t + \psi) A \sin \omega t \cdot dt = \frac{2E_c}{E_{\text{ш}}} \sin \psi.$$

Сумма квадратов выходных эффектов

$$S_x^2(\tau) + S_y^2(\tau) = \left(\frac{2E_c}{E_{\text{ш}}} \right)^2$$

является постоянной величиной и не зависит от значения фазы ψ .

Можно построить оптимальный приемник и по другой схеме с использованием пассивного фильтра (рис. 21,а). Входным элементом в таком приемнике будет высокочастотный фильтр, согласованный с сигналом. От фильтра колебания должны поступать к амплитудному детектору и далее — к пороговому устройству.

В устройстве с пассивным фильтром будет получен тот же выходной эффект, что и при использовании двухканального коррелятора. При воздействии синусоидального сигнала с любым значением начальной фазы на фильтр в последнем начнут нарастать колебания (рис. 21,б). Максимальная амплитуда колебаний независимо от значения фазы ψ будет пропорциональна удвоенному отношению сигнал/шум [Л. 5]:

$$(U_{\Phi})_{\text{макс}} = k \frac{2E_c}{E_{\text{ш}}}.$$

Из-за незнания начальной фазы сигнала мы не сможем заранее определить тот момент времени, в который сигнальная функция достигнет максимума ($t_{\text{м}}$) и когда

нужно осуществлять сравнение с порогом. Но точное знание этого момента и не понадобится, так как с помощью детектора выделяется огибающая колебаний в фильтре (рис. 21, в), которая и подводится к пороговому устройству.

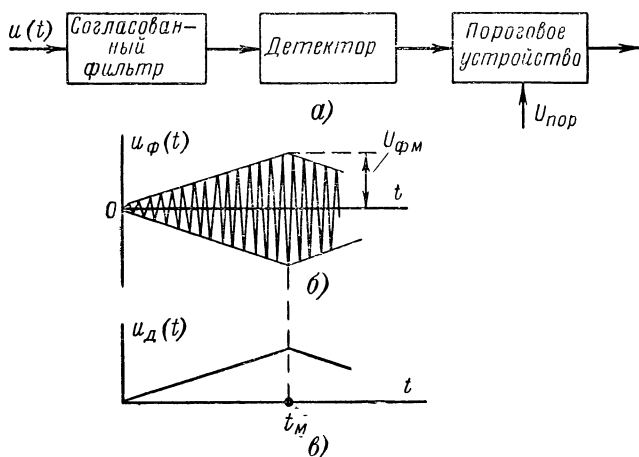


Рис. 21. Обнаружение сигнала с неизвестной начальной фазой достаточным приемником с пассивным фильтром.
а — функциональная схема приемника с пассивным фильтром;
б — напряжение на выходе фильтра; в — напряжение на выходе детектора.

Для определения рабочих характеристик приемника нужно знать законы распределения огибающих одного шума $U_{\text{ш}}$ и шума вместе с сигналом $U_{\text{с+ш}}$ на выходе фильтрующего устройства. Эти распределения хорошо известны (см., например, [Л. 5]): распределение амплитуды шума подчиняется закону Релея

$$w(U_{\text{ш}}) = \frac{U_{\text{ш}}}{\sigma_{\text{ш}}^2} \exp\left(-\frac{U_{\text{ш}}^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right),$$

а распределение амплитуды суммарного колебания — обобщенному закону Релея

$$w(U_{\text{с+ш}}) = \frac{U_{\text{с+ш}}}{\sigma_{\text{ш}}^2} \exp\left(-\frac{U_{\text{с+ш}}^2 + U_{\text{с}}^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right) I_0\left(\frac{U_{\text{с}} U_{\text{с+ш}}}{\sigma_{\text{ш}}^2}\right).$$

Если выбрано пороговое напряжение $U_{\text{пор}}$, то вероятность ложной тревоги равна:

$$W_{\text{л.т}} = \int_{U_{\text{пор}}}^{\infty} \frac{U_{\text{ш}}}{\sigma_{\text{ш}}^2} \exp\left(-\frac{U_{\text{ш}}^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right) dU_{\text{ш}} = \exp\left(-\frac{U_{\text{пор}}^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right),$$

а вероятность правильного обнаружения

$$W_{\text{п.о}} = \int_{U_{\text{пор}}}^{\infty} \frac{U_{\text{с+ш}}}{\sigma_{\text{ш}}^2} \exp\left(-\frac{U_{\text{с+ш}}^2 + U_{\text{с}}^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right) I_0\left(\frac{U_{\text{с}} U_{\text{с+ш}}}{\sigma_{\text{ш}}^2}\right) dU_{\text{с+ш}}.$$

Последнее выражение поддается только численному интегрированию. При практических расчетах удобно пользоваться приближенной формулой [Л. 7], связывающей значения вероятностей $W_{\text{п.о}}$ и $W_{\text{л.т}}$ с отношением сигнал/шум

$$R = 2 \left(\sqrt{\ln \frac{1}{W_{\text{л.т}}}} + \sqrt{\ln \frac{1}{1 - W_{\text{п.о}}} - 1,4} \right)^2; \quad (17)$$

погрешность расчетов по формуле (17) при $W_{\text{л.т}} \leq 0,1$ и $W_{\text{п.о}} \geq 0,9$ не превышает 15% .

Сравнение формул (15) и (17), характеризующих обнаружение полностью известного сигнала и сигнала с неизвестной начальной фазой, показывает, что незнание начальной фазы сигнала ухудшает характеристики обнаружения. Если заданы вероятности $W_{\text{п.о}}$ и $W_{\text{л.т}}$, то требуемое отношение сигнал/шум будет больше при обнаружении сигнала с неизвестной фазой; для заданного значения R при обнаружении сигнала с неизвестной начальной фазой либо вероятность ложной тревоги будет больше (при заданной $W_{\text{п.о}}$), либо вероятность правильного обнаружения меньше (при заданной $W_{\text{л.т}}$). Абсолютное увеличение требуемого значения R зависит от начальных условий: если $W_{\text{п.о}}$ велика, а $W_{\text{л.т}}$ мала (что соответствует большому отношению сигнал/шум), то незнание начальной фазы мало сказывается на рабочих характеристиках.

Например, при $W_{\text{п.о}} = 0,99$ и $W_{\text{л.т}} = 10^{-5}$ требуемое отношение сигнал/шум при обнаружении полностью известного сигнала [формула (15)] равно $R = 49,4$; при обнаружении сигнала с неизвестной фазой для тех же

значений вероятностей требуемое значение R равно 53,6 [формула (17)]. Необходимое увеличение отношения сигнал/шум составляет 8,5%. Но если $W_{л.т}$ велика и $W_{ш.о}$ меньше (т. е. соотношение сигнал/шум относительно мало), то незнание фазы сказывается весьма заметно. Для $W_{ш.о}=0,9$ и $W_{л.т}=0,1$ при расчете по формуле (15) получим $R=7,2$, а по формуле (17) $R=12,2$, т. е. имеет место увеличение требуемого отношения сигнал/шум из-за незнания начальной фазы почти вдвое.

Наличие амплитудного детектора или схем возведения напряжения в квадрат существенно ухудшает характеристики приемника при обнаружении группы сигналов. Отношение сигнал/шум после детектора, как показано ниже, всегда уменьшается. При приеме группы сигналов с неизвестной начальной фазой, изменяющейся случайным образом от сигнала к сигналу, накопление сигналов возможно только по огибающей, т. е. после детектора. Следовательно, к детектору сигналы должны подводиться по очереди и если для каждого из элементарных сигналов $R=2E_c/E_{ш}$ будет мало ($R < 1$), то в детекторе соотношение сигнала и шума существенно ухудшится.

Уменьшение отношения сигнал/шум в детекторе может быть иллюстрировано следующими весьма упрощенными рассуждениями. Любая характеристика амплитудного детектора аппроксимируется полиномом степени не ниже второй. Обратимся к аппроксимации простейшего вида

$$u_{\text{вых}} = a u_{\text{вх}}^2,$$

где $u_{\text{вх}}$ — входное напряжение детектора;

$u_{\text{вых}}$ — напряжение на его выходе.

Пусть на входе имеются амплитудные значения напряжения сигнала U_c и шума $U_{ш}$ и

$$U_{\text{вх}} = U_c + U_{ш}.$$

Отношение сигнал/шум до детектора будет равно:

$$R_{\text{вх}} = \left(\frac{U_c}{U_{ш}} \right)^2.$$

После детектора получим:

$$U_{\text{вых}} = a (U_c^2 + 2U_c U_{ш} + U_{ш}^2).$$

В выходном напряжении член aU_c^2 образует сигнальную составляющую $(U_{\text{ВЫХ}})_c$, а два другие члена $a2U_cU_{\text{ш}} + aU_{\text{ш}}^2$, включающие случайную составляющую, определяют напряжение шума $(U_{\text{ВЫХ}})_{\text{ш}}$, т. е.

$$(U_{\text{ВЫХ}})_c = aU_c^2,$$

$$(U_{\text{ВЫХ}})_{\text{ш}} = a(2U_cU_{\text{ш}} + U_{\text{ш}}^2).$$

Отношение сигнал/шум после детектора

$$R_{\text{ВЫХ}} = \left[\frac{(U_{\text{ВЫХ}})_c}{(U_{\text{ВЫХ}})_{\text{ш}}} \right]^2 = \left[\frac{U_c^2}{2U_cU_{\text{ш}} + U_{\text{ш}}^2} \right]^2.$$

Если $U_c \gg U_{\text{ш}}$, то $2U_cU_{\text{ш}} \gg U_{\text{ш}}^2$ и

$$R_{\text{ВЫХ}} \approx \left[\frac{U_c}{2U_{\text{ш}}} \right]^2 = \frac{1}{4} R_{\text{ВХ}},$$

т. е. при большом отношении сигнала к шуму $R_{\text{ВЫХ}}$ пропорционально $R_{\text{ВХ}}$ и в этом смысле (для R) детектор может быть назван линейным. Но если $U_c \ll U_{\text{ш}}$, то $2U_cU_{\text{ш}} \ll U_{\text{ш}}^2$ и

$$R_{\text{ВЫХ}} \approx \left[\frac{U_c}{U_{\text{ш}}} \right]^4 = R_{\text{ВХ}}^2.$$

Отсюда следует, что при малом отношении сигнал/шум до детектора оно резко уменьшается после детектора; детектор становится квадратичным (для R).

Уменьшение отношения сигнал/шум при детектировании принято называть потерями в детекторе и оценивать коэффициентом потерь

$$\alpha_{\text{дет}} = \frac{R_{\text{ВХ}}}{R_{\text{ВЫХ}}}.$$

Чем меньше требуемое суммарное значение отношения сигнал/шум R_{Σ} , которое нужно получить в результате накопления N_c сигналов, и чем больше N_c (т. е. чем меньше отношение сигнал/шум для одиночного сигнала), тем больше потери в детекторе.

Графики, приведенные на рис. 22, позволяют определить значения $\alpha_{\text{дет}}$ при изменении в широких пределах R_{Σ}

и N_c . Эти графики показывают, что теоретически потери в детекторе отсутствуют лишь при $R_z = \infty$, а точно квадратичным детектор становится при $R_z = 0$. При любом конечном R_z потери в детекторе существуют и для большого N_c могут достигать весьма значительных размеров.

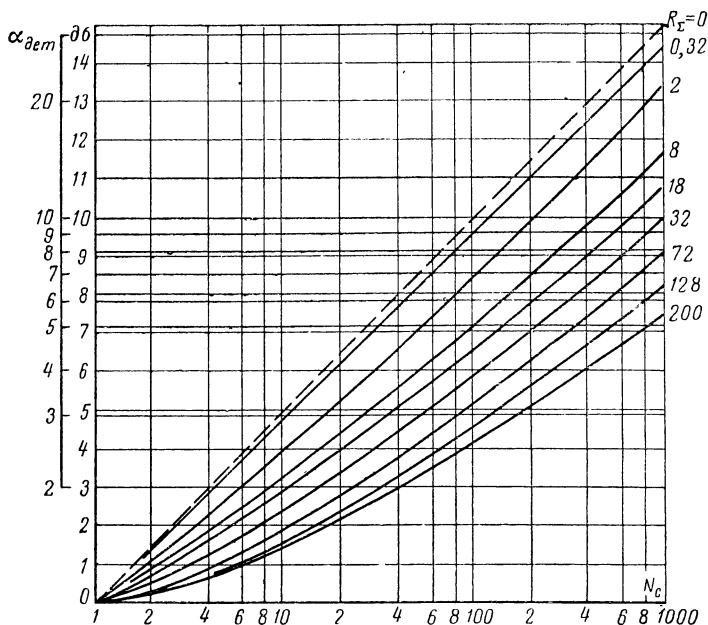


Рис. 22. Характеристики потерь в детекторе.

Так, для $R_z = 32$ и $N_c = 1000$ коэффициент потерь равен 10, т. е. соотношение сигнала и шума ухудшается в детекторе в 10 раз.

Для исключения рассмотренных потерь необходимо накапливать сигналы до детектора. При случайном изменении начальной фазы от сигнала к сигналу накопление до детектора невозможно и возникают потери. Если же начальная фаза элементарных сигналов группы неизвестна, но между сигналами имеется жесткая связь по фазе колебаний (сигналы когерентные), то суммирование может быть осуществлено до детектора (см. схему на рис. 19). При этом потери в детекторе будут отсутствовать ($\alpha_{\text{дет}} = 1$), а для расчета требуемого отношения

сигнал/шум может быть использована формула (17), так как начальная фаза всего суммарного сигнала остается неизвестной.

На рис. 23 приведена функциональная схема приемника, оптимального при обнаружении группы элементарных сигналов со случайной начальной фазой. Принципиально новым элементом в этой схеме по сравнению с предыдущими является последетекторное накопительное устройство. Следует подчеркнуть, что накопительное

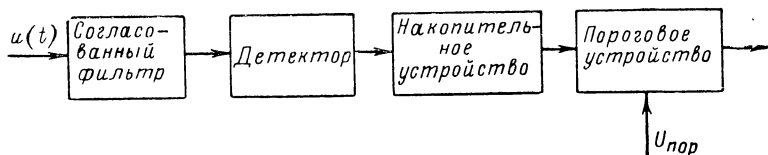


Рис. 23. Функциональная схема достаточного приемника для обнаружения группы сигналов с неизвестной начальной фазой.

устройство тоже является фильтром, который должен быть согласован с сигналом. Если согласования не будет, то возникнет дополнительное уменьшение отношения сигнал/шум (дополнительные потери) [Л. 5].

На рис. 24,а приведена функциональная схема накопительного устройства для пачки импульсных сигналов, которые изображены на рис. 24,б. Накопительное устройство включает сумматор с линией задержки на время T_0 в цепи обратной связи между выходом и входом. Схемы на рис. 24,а и 19 аналогичны. Различие между ними состоит лишь в том, что в схеме на рис. 19 осуществляется суммирование высокочастотных сигналов и требуемая задержка в линии должна была бы выдерживаться с точностью до небольшой доли периода высокой частоты, а в схеме на рис. 24,а суммируются видеоимпульсы и требуемая точность временной задержки характеризуется долей длительности самого импульса $\tau_{\text{и}}$ (рис. 24,б), т. е. во втором случае требуется гораздо меньшая точность работы аппаратуры.

Пусть коэффициент передачи по напряжению в линии задержки $\beta < 1$. Тогда напряжение, поступающее от линии задержки к сумматору после однократного прохождения пачки импульсов через линию обратной связи, будет $u_1 = \beta u_c(t - T_0)$; оно изображено на рис. 24,в. После двукратного прохождения пачки через линию задержки получим $u_2 = \beta^2 u_c(t - 2T_0)$, после трехкратного

$u_3 = \beta^3 u_c(t - 3T_0)$ и т. д. Графики, характеризующие напряжения u_2 и u_3 , приведены на рис. 24, з, д. Напряжение, образующееся на выходе сумматора, иллюстрируется рис. 24, е.

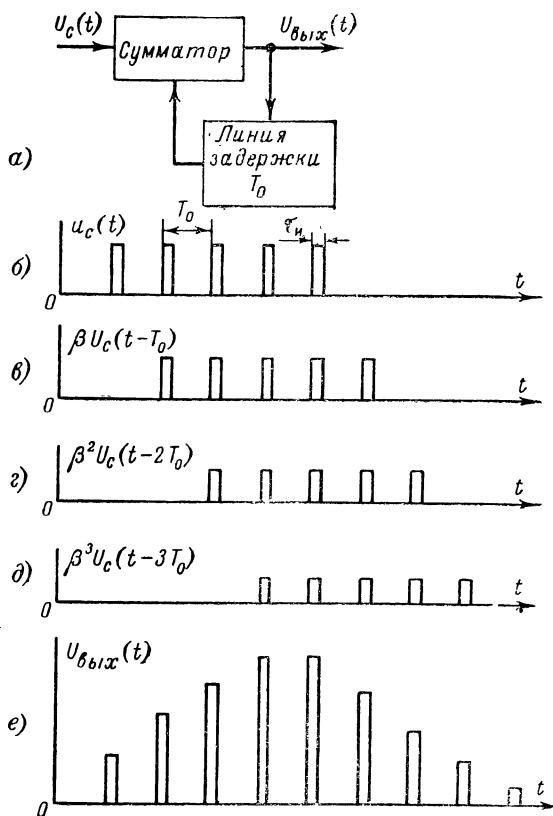


Рис. 24. Суммирование протектированных импульсов.

а — схема суммирующего устройства; б — входные импульсы; в — пачка импульсов после одного цикла задержки; г — результат двух циклов задержки; д — результат трех циклов задержки; е — выходное напряжение устройства.

Для оценки потерь в накопительном устройстве интересно определить соотношение сигнал/шум на его выходе. Импульсы сигнала будут суммироваться по ампли-

туде, и максимальная амплитуда сигнала на выходе будет равна:

$$U_{c\Sigma} = U_c \sum_{k=0}^{N_c-1} \beta_k,$$

а максимальная мощность сигнала

$$P_{c\Sigma} = U_c^2 \left(\sum_{k=0}^{N_c-1} \beta_k \right)^2.$$

Шум в отличие от сигнала будет суммироваться по мощности, поэтому

$$P_{ш\Sigma} = \sigma_{ш}^2 \left(\sum_{k=0}^{N_c-1} \beta_k \right)^2.$$

Наибольшее значение отношения сигнал/шум по мощности на выходе накопительного устройства оказывается равным:

$$\left(\frac{P_{c\Sigma}}{P_{ш\Sigma}} \right) = \frac{P_c}{P_{ш}} \frac{\left(\sum_{k=0}^{N_c-1} \beta_k \right)^2}{\sum_{k=0}^{N_c-1} \beta_k^2}.$$

Если бы $\beta = 1$, то увеличение отношения сигнал/шум после накопления было бы равно N_c , т. е.

$$\left(\frac{P_{c\Sigma}}{P_{ш\Sigma}} \right)_{\max} = \frac{P_c}{P_{ш}} N_c,$$

где $P_c/P_{ш}$ — отношение сигнал/шум по мощности для одиночного импульса на входе накопительного устройства.

Но взять β равным единице нельзя, так как после первой же пачки импульсов схема возбудится, и с периодичностью T_0 на выходе будут появляться импульсы максимальной амплитуды. Для того чтобы после окончания пачки амплитуда выходного импульса постепенно уменьшилась до нуля, необходимо выбирать $\beta < 1$. Расчеты показывают, что, во-первых, для каждого значения числа импульсов в пачке N_c имеется оптимальное зна-

чение коэффициента передачи β , при котором достигается наибольшее отношение сигнал/шум, и, во-вторых, реальное увеличение отношения сигнал/шум после накопления импульсов меньше N_c . Графики на рис. 25,а

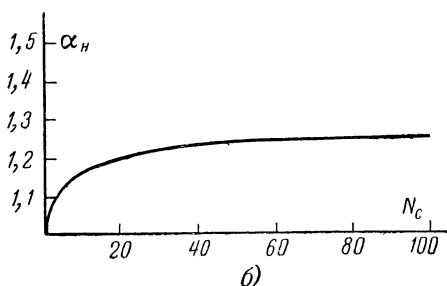
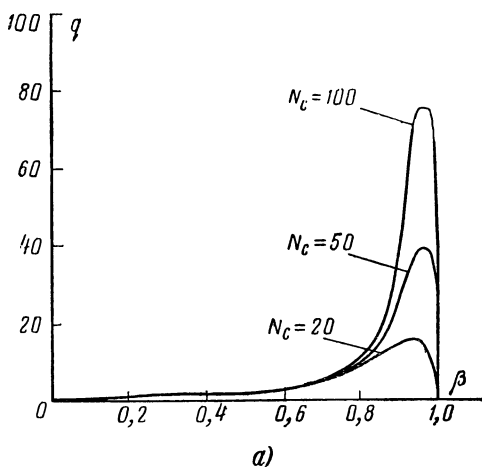


Рис. 25. Эффективность накопления видеоимпульсов.

а — относительное увеличение отношения сигнал/шум; б — потери в накопительном устройстве.

характеризуют увеличение отношения сигнал/шум по мощности на выходе накопительного устройства по сравнению с этим отношением для единичного импульса

$$q = \frac{P_{с\Sigma}/P_{ш\Sigma}}{P_c/P_{ш}}.$$

Величина q зависит от числа накапливаемых импульсов N_c и значения коэффициента передачи β [Л. 5].

Уменьшение реального возрастания выходного отношения сигнал/шум по сравнению с числом накапливаемых импульсов может быть названо потерями в накопительном устройстве.

Коэффициент потерь равен:

$$\alpha_n = \frac{N_c}{q} > 1.$$

На рис. 25,б приведен график, характеризующий значения коэффициента потерь в накопительном устройстве.

Изложенные соображения полностью применимы к оценке последетекторных накопительных устройств самого различного вида: электроннолучевых трубок с послесвечением, потенциалоскопов, магнитных барабанов и др.

Обнаружение сигнала с неизвестной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой. Допустим, что, помимо начальной фазы, случайной величиной является и амплитуда сигнала. Это предположение соответствует действительности, так как основные факторы, влияющие на амплитуду сигнала,—поглощение энергии радиоволн в среде, расстояние между источником излучения и приемником, их взаимная ориентация—подвержены случайным изменениям. Для устранения нового безынформативного параметра нужно задаться плотностью его априорного распределения $w(A)$ и произвести усреднение по всем возможным значениям A . Если предположить, что априорная плотность распределения амплитуды сигналов выражается законом Релея [Л. 5]

$$w(A) = \frac{A}{A_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2A_s^2}\right),$$

где A_s^2 — квадрат эффективного значения амплитуды сигнала, и произвести интегрирование апостериорной вероятности наличия сигнала в пределах от нуля до бесконечности

$$\begin{aligned} \int_0^\infty W_u(u_c, \psi, A) dA &= K_1 W(u_c) \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{A}{A_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2A_s^2}\right) \exp\left(-\frac{A^2 T_n}{2E_m}\right) I_0(M) dA, \end{aligned}$$

то после устранения случайной амплитуды [Л. 6] получим

$$W_u(u_c) = K_1 W(u_c) \frac{2}{2 + R_{cp}} \exp\left(-\frac{M^2}{2 + R_{cp}}\right),$$

где $R_{cp} = 2E_{с.ср}/E_{ш}$ — среднее значение отношения сигнал/шум.

По-прежнему апостериорная вероятность отсутствия сигнала

$$W_u(0) = K_1 W(0).$$

Следовательно, при незнании и фазы, и амплитуды сигнала в достаточном оптимальном приемнике операциями принципиального значения будут являться, во-первых, образование величины M и, во-вторых, сравнение этой величины с порогом

$$\xi = \sqrt{(2 + R_{cp}) \ln \left[\frac{W(0)}{W(u_c)} \frac{2}{2 + R_{cp}} \right]}.$$

Схема приемника остается такой же, какая должна быть использована при обнаружении сигнала с неизвестной начальной фазой; единственное отличие состоит в выборе величины порога.

При обнаружении сигнала с неизвестными начальной фазой и амплитудой рабочие характеристики приемника описываются простым соотношением

$$R_{cp} = 2 \frac{\ln \frac{1}{\overline{W}_{л.т}}}{\ln \frac{1}{\overline{W}_{л.о}}} - 2. \quad (18)$$

Так как амплитуда сигнала является случайной величиной и случайной становится энергия сигнала, то при рассмотрении рабочих характеристик приемника придется оперировать со средними значениями отношения сигнал/шум $R_{ср}$. Рабочие характеристики приемника для обнаружения сигнала с неизвестными фазой и амплитудой изображены на рис. 17 пунктирными линиями.

Флуктуация амплитуды сигнала может и затруднить, и облегчить его обнаружение. Сравним значения отношения сигнал/шум, требуемые при обнаружении сигнала

с известной [формула (17)] и флуктуирующей [формула (18)] амплитудой,

$$\frac{R}{R_{\text{ср}}} = \left(\sqrt{\ln \frac{1}{W_{\text{п.т}}}} + \right. \\ \left. + \sqrt{\ln \frac{1}{1 - W_{\text{п.о}}} - 1,4} \right)^2 : \left(\frac{\ln \frac{1}{W_{\text{п.т}}}}{\ln \frac{1}{W_{\text{п.о}}}} - 1 \right).$$

Если допустить, что $W_{\text{п.т}} \ll 1 - W_{\text{п.о}}$, придем к приближенному равенству

$$\frac{R}{R_{\text{ср}}} \approx \ln \frac{1}{W_{\text{п.о}}},$$

из которого следует, что при $W_{\text{п.о}} < 1/e \approx 0,37$ имеет место $R_{\text{ср}} < R$, а для $W_{\text{п.о}} > 1/e$ справедливо $R_{\text{ср}} > R$. Если вероятность правильного обнаружения сигнала должна быть велика, то требуемое отношение сигнал/шум при флуктуирующем сигнале будет больше, чем при отсутствии флуктуации $R_{\text{ср}} > R$; значит, флуктуация затрудняет обнаружение. Для малого значения вероятности правильного обнаружения требуемое отношение сигнал/шум будет больше при нефлуктуирующем сигнале $R > R_{\text{ср}}$ и, значит, флуктуация способствует обнаружению.

Обнаружение сигнала с неизвестными начальной фазой, амплитудой и частотой. Незнание точного значения частоты принимаемых сигналов связано с образованием доплеровского частотного сдвига при перемещении приемника относительно источника излучения. Если радиальная составляющая скорости относительного перемещения равна V_p и длина волны λ , то доплеровский сдвиг по частоте равен:

$$F_{\text{дп}} = \pm \frac{2V_p}{\lambda}.$$

В том случае, когда ширина спектра сигнала много больше доплеровского сдвига $\Delta f_c \gg F_{\text{дп}}$ и полоса пропускания приемника согласована с сигналом, изменением частоты сигнала обычно можно пренебречь и использовать те устройства, о которых шла речь выше.

Для протяженных сигналов (также при обеспечении согласования) условие малости частотного сдвига мо-

жет не выполняться и этот сдвиг приходится принимать во внимание. Пусть, например, радиальная составляющая скорости относительного движения приемника равна 2 000 км/ч, а длина волны 3 см. При этом доплеровский сдвиг частоты сигнала составит 37 000 гц. Для сигналов длительностью 1 мксек, ширина спектра которых по уровню 0,5 равна 1 Мгц, частотный сдвиг на 37 кгц практически не имеет значения, и им можно пренебречь. Но если длительность сигнала увеличить до 1 мсек (ширина спектра 1 кгц), то доплеровский сдвиг во много раз превысит полосу пропускания, согласованного с сигналом приемника. Если при точной настройке приемника на частоту сигнала максимальное значение сигнальной функции равно $S(\omega_0)$, то наличие расстройки $\Delta\omega$ приводит к уменьшению сигнальной функции до $S(\omega_0 + \Delta\omega) < S(\omega_0)$. Это уменьшение амплитуды сигнала вызовет ухудшение отношения сигнал/шум на выходе приемника, так как шумовая составляющая останется неизменной. Эквивалентное уменьшение отношения сигнал/шум на входе приемника может быть оценено коэффициентом потерь α_ω :

$$\alpha_\omega = \left[\frac{S(\omega_0)}{S(\omega_0 + \Delta\omega)} \right]^2.$$

Коэффициент α_ω характеризует требуемое увеличение отношения сигнал/шум на входе приемника, которое должно быть при наличии расстройки для поддержания вероятностей $W_{\text{п.о}}$ и $W_{\text{л.т}}$ неизменными.

При значительных частотных сдвигах сигналов приходится использовать несколько параллельно работающих независимых приемных каналов, настроенных на частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т. д. Характеристики обнаружения сигналов в каждом из каналов определяются приведенными выше соотношениями (15), (17), (18).

Обнаружение сигнала, занимающего одно из m возможных положений. До сих пор мы предполагали, что обнаруживается один-единственный сигнал, характеризуемый более или менее известными параметрами.

В действительности же любое приемное устройство воспринимает множество сигналов с совершенно различными значениями параметров. Казалось бы, что рассмотренная теория очень далека от реальности, и ею невозможно воспользоваться для решения практических задач. Но это не так. Оказывается, что учет множествен-

ности сигналов приводит лишь к небольшим поправкам полученных выше соотношений.

Рассмотрим проблему обнаружения сигналов с существенно различными значениями параметров на примере импульсной радиолокационной станции (РЛС), измеряющей дальность и азимут обнаруживаемых целей.

Станция излучает импульсные сигналы с периодом следования $T_{\text{и}}$. Синхронно с излучением каждого зондирующего импульса на экране электроннолучевого индикатора начинается развертка по дальности; на рис. 26 шкала дальности D расположена по вертикали. Одновременно с изменением положения луча станции по азимуту φ на экране индикатора осуществляется медленная (относительно развертки по дальности) развертка по горизонтали (азимутальная шкала).

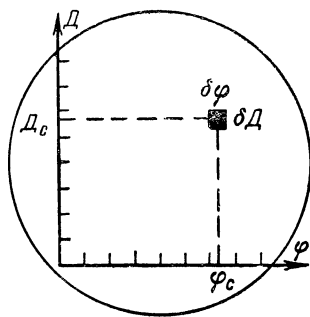


Рис. 26. Изображение на экране индикатора радиолокационной станции.

катора начинается развертка по дальности; на рис. 26 шкала дальности D расположена по вертикали. Одновременно с изменением положения луча станции по азимуту φ на экране индикатора осуществляется медленная (относительно развертки по дальности) развертка по горизонтали (азимутальная шкала). Каждый импульсный сигнал проходит через оптимальный приемник, устройство которого соответствует схеме, приведенной на рис. 23; накопительным устройством служит экран электроннолучевой трубки.

В зависимости от параметров сигнала — дальности и азимута — он будет изображаться в той или иной точке на экране индикатора. На рис. 26 параметры сигнала, изображенного ярким пятном, имеют значения D_c и φ_c . С учетом разрешающей способности РЛС по дальности δD и азимуту $\delta \varphi$ отдельный сигнал будет занимать на экране область, имеющую размеры δD и $\delta \varphi$. В пределах этой области сигналы не могут быть дифференцированы, т. е. те сигналы, значения параметров которых различаются между собой меньше чем на δD или $\delta \varphi$, воспринимаются на экране РЛС как один сигнал. Если протяженность шкалы дальности РЛС — $D_{\text{шк}}$ и азимута — $\varphi_{\text{шк}}$, то всего на экране индикатора могут наблюдаться раздельно m сигналов, $m = \frac{D_{\text{шк}}}{\delta D} \frac{\varphi_{\text{шк}}}{\delta \varphi}$, или, как при-

нято говорить, отдельный сигнал может занимать одно из m возможных положений.

В рассматриваемой системе обнаружения сигналы от различных целей будут проходить через приемник независимо друг от друга в различные моменты времени, а так как накопление сигналов осуществляется в различных точках экрана индикатора РЛС, то можно говорить об использовании m -канальной системы обнаружения. Шум может создавать отметки на экране в любом месте. Порогом в рассматриваемом устройстве является выбранный оператором уровень яркости отметки: если в какой-либо точке уровень яркости пятна превысит пороговый, то принимается решение о том, что присутствует соответствующий сигнал. Если и в самом деле этот сигнал существует, то имеет место правильное обнаружение; в противном случае (при отсутствии сигнала) возникает ложная тревога.

Вероятность правильного обнаружения в системе не будет отличаться от вероятности правильного обнаружения отдельного сигнала в специальном приемнике; применительно к каждому отдельному сигналу нет никаких новых факторов, изменяющих вероятность его обнаружения в системе. Но вот вероятность ложной тревоги в системе $W_{л.т\Sigma}$ существенно отличается от вероятности ложной тревоги при обнаружении отдельного сигнала $W_{л.тi}$. В силу идентичности условий прохождения шума к каждой точке экрана индикатора можно утверждать, что вероятности ложной тревоги для всех m возможных элементов изображения одинаковы.

Вероятность правильного необнаружения сигнала в системе $W_{п.н.о\Sigma}$ однозначно связана с вероятностью ложной тревоги в системе

$$W_{п.н.о\Sigma} = 1 - W_{л.т\Sigma}$$

и очевидным образом выражается через вероятность правильного необнаружения отдельного сигнала $W_{п.н.oi}$:

$$W_{п.н.о\Sigma} = (W_{п.н.oi})^m,$$

так как правильные необнаружения в различных точках экрана есть события независимые. Но

$$W_{п.н.oi} = 1 - W_{л.тi},$$

поэтому

$$W_{п.н.о\Sigma} = (1 - W_{л.тi})^m$$

и

$$W_{л.т\Sigma} = 1 - (1 - W_{л.тi})^m.$$

Заменяя биномиальный ряд его первыми двумя членами, что допустимо при $W_{л.тi} \ll 1$, получим:

$$W_{л.т\Gamma} \approx mW_{л.тi}.$$

Следовательно, вероятность ложной тревоги в системе обнаружения в m раз больше вероятности ложной тревоги при обнаружении отдельного сигнала.

Теперь очень просто перейти к рабочим характеристикам обнаружения рассмотренной m -канальной системы. Для того чтобы в системе получить результирующие значения вероятностей правильного обнаружения $W_{п.о}$ и ложной тревоги $W_{л.т}$, нужно обеспечить при обнаружении отдельного сигнала вероятности $W_{п.о}$ и $W_{л.т}/m$. Следовательно, требуемое для системы отношение сигнал/шум может быть рассчитано по формулам (15), (17), (18), в которые следует подставить $W_{л.т}/m$. Выполнив указанную подстановку, получим:

для полностью известного сигнала

$$R \approx 2 \left(\sqrt{\ln m + \ln \frac{1}{W_{л.т}} - 1,4} + \sqrt{\ln \frac{1}{1 - W_{п.о}} - 1,4} \right)^2; \quad (15a)$$

для сигнала с неизвестной начальной фазой

$$R \approx 2 \left(\sqrt{\ln m + \ln \frac{1}{W_{л.т}}} + \sqrt{\ln \frac{1}{1 - W_{п.о}} - 1,4} \right)^2; \quad (17a)$$

для сигнала с неизвестной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой

$$R_{ср} = 2 \frac{\ln m + \ln \frac{1}{W_{л.т}}}{\ln \frac{1}{W_{п.о}}} - 2. \quad (18a)$$

Формулы (15a), (17a) и (18a) показывают, что при обнаружении одного из m сигналов требуется большее отношение сигнал/шум по сравнению со случаем обнаружения сигнала, который может занимать только одно определенное положение. Физически этот результат понятен: при обнаружении сигнала в системе мы наблюда-

даем шум во многих местах на экране, и для того чтобы с необходимой надежностью выделить одну из отметок (там, где есть сигнал), нужно иметь большее превышение сигнала над шумом.

Относительное увеличение требуемого значения отношения сигнал/шум невелико, в формулу входит логарифм возможного числа положений сигнала. Если, например, обнаруживается сигнал с неизвестной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой при $W_{п.о}=0,9$ и $W_{л.т}=10^{-5}$, то увеличение отношения сигнал/шум при переходе от одноканальной системы к системе с 10^4 каналов составит всего лишь 72%. (Вместо $R_{ср}=240$ в одноканальной системе потребуется $R_{ср}=412$ в многоканальной.)

9. Реальные характеристики обнаружения

Рассмотренные выше рабочие характеристики приемника [графики на рис. 17 или формулы (15), (17), (18), (15а), (17а) и (18а)] позволяют оценить лишь теоретически необходимое для обнаружения сигнала с заданными вероятностями $W_{п.о}$ и $W_{л.т}$ отношение сигнал/шум R . При использовании любой реальной системы обнаружения для обеспечения заданных значений вероятностей $W_{п.о}$ и $W_{л.т}$ потребовалось бы обеспечить значительно большее отношение сигнал/шум, чем это требуется в соответствии с рабочими характеристиками.

Объясняется это тем, что в любой реальной системе вследствие ее несовершенства имеет место уменьшение отношения сигнал/шум по сравнению с его значением на входе, неучтенное при теоретическом исследовании. Если в i -м элементе системы обнаружения коэффициент потерь, характеризующий уменьшение R , равен α_i , а между антенной и пороговым устройством таких элементов k , то реально требуемое отношение сигнал/шум на входе приемника будет равно:

$$R_{вх} = R_{р.х.п} \prod_{i=1}^k \alpha_i, \quad (19)$$

где $R_{р.х.п}$ — отношение сигнал/шум, определяемое с помощью рабочих характеристик приемника.

Рассмотрим некоторые виды потерь. Прежде всего укажем на потери в антенне. Под этим понимают коэф-

коэффициент $\alpha_A > 1$, с помощью которого учитывается различие амплитуд принимаемых сигналов в пределах диаграммы направленности. Практически амплитуда сигнала изменяется в приемнике от нуля до максимума при повороте диаграммы направленности; максимальное значение сигнала соответствует направлению максимума диаграммы на источник. Обычно в расчетах используют именно это максимальное значение сигнала, но оно не отражает правильного соотношения сигнала и шума при накоплении нескольких сигналов. Введение коэффициента α_A позволяет уточнить расчет. Если произвести усреднение по широкому кругу влияющих факторов, то значение α_A можно принять равным 1,5.

Как правило, в приемниках используют фильтры, согласованные с сигналом лишь по ширине полосы пропускания

$$\Delta f_{\text{пр}} = \Delta f_c,$$

а не по точному закону спектральной функции. Эта неоптимальность фильтра приводит к ухудшению отношения сигнал/шум по сравнению с теоретически возможным. Коэффициент потерь α_f лежит в пределах приблизительно от 1,05 до 1,18 в зависимости от вида сигнала.

По целому ряду причин, в частности из-за случайных изменений частоты колебаний, генерируемых в передатчиках радиоустройств, полосу пропускания приемного тракта приходится брать значительно шире спектра сигнала:

$$\frac{\Delta f_{\text{пр}}}{\Delta f_c} = \rho > 1.$$

Снова возникает ухудшение отношения сигнал/шум, и соответствующий коэффициент потерь $\alpha_{\Delta f}$ может быть рассчитан с помощью графиков потерь в детекторе, изображенных на рис. 22. Пусть осуществляется последетекторное накопление N сигналов, и при этом требуется получить суммарное отношение сигнал/шум R_{Σ} . С помощью графиков рис. 22 находим значение потерь в детекторе для числа импульсов N , т. е. α_N и числа импульсов ρN , т. е. $\alpha_{\rho N}$ при заданном R_{Σ} . Тогда коэффициент потерь определится формулой

$$\alpha_{\Delta f} = \frac{\alpha_{\rho N}}{\alpha_N}.$$

Например, для $R_z = 72$, $N = 20$ и $\rho = 3$ получим $\alpha_{z_0} = 2$, $\alpha_{s_0} = 2,8$ и $\alpha_{\Delta f} = 1,4$. Если принимается только один сигнал, то $N = 1$ и $\rho N = \rho$. Одно из возможных объяснений физического смысла такого метода расчета состоит в следующем. При расширении полосы пропускания фильтра по сравнению со спектром сигнала длительность шумовых выбросов, однозначно определяемая характеристиками фильтра, существенно уменьшается по сравнению с длительностью сигнала. Фаза высокочастотного заполнения шумовых выбросов изменяется случайным образом. Поэтому шумы как бы дробят на отдельные части элементарные сигналы. Это приводит к дополнительным потерям в детекторе, которые могут быть учтены с помощью графиков рис. 22 указанным способом.

Выше рассматривались потери, связанные с неточной настройкой фильтра на частоту сигнала (α_ω) и неидеальностью накопительного устройства (α_H).

Можно указать на потери в устройстве выдачи информации. В частности, если в качестве выходного устройства информации используется электроннолучевой индикатор, то коэффициент потерь $\alpha_{инд}$ позволяет учитывать дополнительно требуемое увеличение отношения сигнал/шум, связанное с условиями освещенности индикатора, усталостью оператора и т. д. В среднем коэффициент $\alpha_{инд}$ можно принять равным 1,5.

Конечно, приведенным перечнем источников потерь далеко не исчерпывается их многообразие. В каждой конкретной системе нужно учитывать специфические особенности обнаружения сигналов.

10. Методика определения требуемой энергии сигнала

При расчетах линий связи важно определить необходимую энергию входного сигнала. Эта энергия для одиночного сигнала E_c определяется коэффициентом различимости k_p и энергией шума $E_{ш}$:

$$k_p = \frac{E_c}{E_{ш}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$k_p = \frac{R}{2}.$$

Если учесть формулу (19), то при приеме одиночного сигнала получим:

$$k_p = \frac{R_{p.x.п}}{2} \prod_{i=1}^k \alpha_i,$$

а при приеме N сигналов

$$k_p = \frac{R_{p.x.п}}{2N} \prod_{i=1}^k \alpha_i.$$

Таким образом, для энергии одного сигнала из группы на входе приемника получаем:

$$E_c = E_{ш} \frac{R_{p.x.п}}{2N} \prod_{i=1}^k \alpha_i. \quad (20)$$

При определении требуемой энергии входного сигнала целесообразно выполнять расчеты в следующем порядке:

а) выбрать требуемые значения вероятностей $W_{п.о}$ и $W_{л.т}$;

б) определить принципиальные особенности схемы приемника;

в) определить по рабочим характеристикам приемника требуемое значение отношения сигнал/шум $R_{p.x.п}$;

г) оценить потери (в смысле ухудшения отношения сигнал/шум — α_i) на различных участках приемного тракта;

д) определить энергию шума $E_{ш}$;

е) оценить число принимаемых сигналов;

ж) вычислить энергию одиночного сигнала.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ

11. Общие сведения

При приеме двух и более радиосигналов возникает задача их разделения. Как уже было сказано, процесс разделения сигналов принято называть разрешением. Проблема разрешения весьма актуальна для большинства областей радиотехники. В радиосвязи приходится разрешать сигналы многих одновременно работающих на близких частотах станций. В телевидении разрешающая способность определяет четкость изображения. В радиоастрономии мощным средством исследования Вселенной является спектральный анализ, основанный на разрешении сигналов по частоте. В радиолокации процесс разрешения сигналов непосредственно связан с определением количества и характера целей.

Процесс разрешения сигналов неотделим от процесса их обнаружения. Можно сказать, что разрешение есть обнаружение двух (или более) сигналов в присутствии мешающих шумов. В процессе разрешения необходимо дать ответ на вопрос, что представляет собой выходное напряжение: только шум, или шум и набор вполне определенных, опознанных оператором сигналов. Разрешение сигналов в принципе возможно лишь в тех случаях, если имеются различия их параметров. Разрешение может осуществляться по различию во времени прихода (относительному запаздыванию) сигналов, по различию в их несущих частотах, по направлению прихода радиоволн, а также по различным комбинациям этих параметров. Могут использоваться и другие различия в сигналах, однако указанные ситуации встречаются наиболее часто.

Надежность, уверенность разрешения зависит, так же как и в случае простого обнаружения одного сигнала, от отношения энергии разрешаемых сигналов к энергии шума. Кроме того, надежность разрешения зависит от величины различия в параметрах разрешаемых сигналов. Если бы шум отсутствовал, то в принципе проблема разрешения была бы снята — даже самое ничтожное различие в параметрах сигналов в этом случае могло бы быть отмечено. Наоборот, чем больше относительный уровень

шумов, тем большее различие в параметрах сигналов потребуется для их уверенного разрешения при прочих равных условиях.

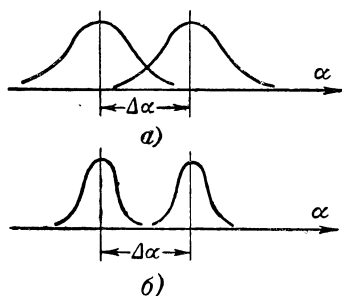


Рис. 27. Огибающие сигналов на выходе приемника.

a — при большой протяженности по параметру α ; *б* — при малой протяженности.

На уверенность разрешения в сильной степени влияет вид разрешаемых сигналов. На рис. 27, *a* и *б* показаны огибающие сигналов, имеющих различную протяженность по параметру разрешения α (этим параметром может быть и время прихода, и частота, и направление прихода). Оче-

видно, что при одинаковой величине $\Delta\alpha$ в обоих рисунках лучше будут разрешены сигналы, показанные на рис. 27, *б*, имеющие меньшую протяженность по параметру разрешения. Действительно, лучше всего по времени прихода разрешаются сигналы малой длительности, по несущей частоте — сигналы, имеющие узкий спектр, по направлению прихода — сигналы, полученные при приеме на антенны, имеющие узкие диаграммы направленности.

Таким образом, разрешающая способность радиоустройств — их способность разделять близкие по параметрам сигналы — зависит от вида используемых сигналов и от соотношения энергии сигналов и мешающих шумов. Процесс разрешения всегда осуществляется по выходному напряжению приемника. Система обработки преобразовывает принимаемые сигналы и изменяет их характеристики. Предполагая, что обработка производится путем оптимальной фильтрации сигналов, мы будем в дальнейшем определять разрешающую способ-

ность, зависящую от указанных факторов, как потенциальную (предельно возможную). Реальная разрешающая способность будет всегда хуже потенциальной из-за неизбежного увеличения протяженности выходных сигналов по параметру разрешения в реальном приемно-индикаторном тракте. Примером может служить увеличение размеров отметки сигнала цели на экране индикатора радиолокатора из-за конечных размеров пятна, дополнительное увеличение длительности сигналов при прохождении через тракт с узкой по сравнению с оптимальной полосой пропускания и т. д.

Основной целью этой главы является обоснование методики количественной оценки потенциальной и реальной разрешающей способности и вывод соотношений, позволяющих получить такую оценку во всех практически важных случаях.

При рассмотрении потенциальной разрешающей способности приводится два подхода к решению задачи. Первый, более строгий, но менее удобный с точки зрения практики, заключается в следующем. Так же, как и в предыдущей главе, исследуется апостериорное распределение вероятностей для разрешаемых сигналов и шума, причем рассматривается ограниченный случай наличия только двух сигналов. На основе анализа этого распределения устанавливается схема приемника, оптимального с точки зрения разрешения сигналов и выводятся формулы, позволяющие вычислить вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги для каждого из разрешаемых сигналов в зависимости от отношения энергий сигналов и шума, и степени различия в их параметрах. Количественная оценка разрешающей способности в этом случае носит статистический характер: разрешающая способность оценивается величиной относительного сдвига по параметру разрешения; этому сдвигу при заданном отношении энергий сигнал/шум соответствуют вполне определенные вероятности правильного обнаружения (разрешения) и ложной тревоги данного сигнала в присутствии другого. К сожалению, схема приемника, оптимального для разрешения двух сигналов, не совпадает с практически используемыми схемами обработки, близкими к оптимальным для обнаружения одного сигнала. Поэтому получаемые в данном методе строгие соотношения не могут быть использованы для оценки разрешения реальных радиоустройств.

Второй метод основан на условном предположении, что даже при отсутствии мешающих шумов разрешающая способность ограничивается деформацией выходных сигналов, возникающей вследствие интерференции при взаимном наложении в приемнике. При допустимых (с точки зрения разрешения) искажениях суммарного выходного сигнала разрешающая способность в этом случае определяется только лишь протяженностью по параметру разрешения каждого из разрешаемых выходных сигналов. При таком подходе получаются простые формулы для оценки разрешающей способности, учитывающие вид разрешаемых сигналов, однако статистический характер процесса разрешения при этом остается не раскрытым, ибо эти формулы не включают отношения энергий сигнал/шум. Тем не менее, этот метод оказался весьма плодотворным при инженерной оценке и сравнительном анализе сигналов различного вида с точки зрения их разрешения в реальных радиотехнических устройствах.

Итак, статистический подход в настоящем его виде позволяет более полно раскрыть закономерности процесса разрешения, но не дает формул, применимых для оценки разрешающей способности реальных устройств. С другой стороны, приближенный метод, хотя и не учитывает влияния отношения энергий сигнал/шум, все же позволяет сравнивать сигналы по их разрешающей способности и приводит к простым формулам оценки, дающим результаты, близкие к практическим. Из сказанного вытекает целесообразность изучения обоих методов.

12. Метод оценки потенциальной разрешающей способности при условии большого отношения энергий сигналов и шума

Выходное напряжение достаточного приемника, осуществляющего оптимальную фильтрацию сигналов, в общем случае может быть представлено (см. § 6) суммой сигнальной и шумовой функций. Задача разрешения в практических случаях возникает тогда, когда осуществлено начальное обнаружение и требуется уточнить, какие именно сигналы обнаружены. На этой стадии отношение энергий сигналов и шума обычно бывает уже достаточно большим. Поэтому практически оправданным

является допущение о том, что шумовая функция равна нулю, и выходное напряжение представляет собой лишь сигнальную функцию.

Считая, что входной сигнал является функцией времени t , частоты ω и угла прихода φ , сигнальную функцию можно записать в виде

$$S(t, \omega, \varphi) = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_c(t, \omega, \varphi) u_c(t - \tau; \omega + \Delta\omega; \varphi + \Delta\varphi) dt. \quad (21)$$

Здесь $u_c(t, \omega, \varphi)$ — принимаемый сигнал; $u_c(t - \tau; \omega + \Delta\omega; \varphi + \Delta\varphi)$ — опорное напряжение, формируемое схемой обработки и в общем случае отличающееся от принимаемого сигнала по времени, частоте и направлению прихода на величины τ , $\Delta\omega$ и $\Delta\varphi$ из-за априорного незнания точных параметров принимаемого сигнала.

Интеграл в правой части (21)

$$\Psi(\tau, \Delta\omega, \Delta\varphi) = \int_0^{T_{\text{н}}} u_c(t, \omega, \varphi) u_c(t - \tau; \omega + \Delta\omega; \varphi + \Delta\varphi) dt \quad (22)$$

принято называть смешанной автокорреляционной функцией входного сигнала.

Термин «смешанная автокорреляционная функция» является условным и указывает на то, что коррелируемые напряжения имеют сдвиг не только по времени, как в случае обычной корреляционной функции, но также и по другим параметрам (частоте, направлению прихода).

При $\tau = 0$, $\Delta\omega = 0$ и $\Delta\varphi = 0$

$$\Psi(0, 0, 0) = \int_0^{T_{\text{н}}} u_c^2(t, \omega, \varphi) dt = E_c, \quad (23)$$

где E_c — энергия сигнала за интервал наблюдения $0 \div T_{\text{н}}$.

В дальнейшем будет использоваться нормированное значение смешанной автокорреляционной функции

$$\begin{aligned}\Psi_0(\tau, \Delta\omega, \Delta\varphi) &= \frac{\Psi(\tau, \Delta\omega, \Delta\varphi)}{\Psi(0, 0, 0)} = \frac{\Psi(\tau, \Delta\omega, \Delta\varphi)}{E_c} = \\ &= \frac{1}{E_c} \int_0^{T_H} u_c(t, \omega, \varphi)(t - \tau; \omega + \Delta\omega; \varphi + \Delta\varphi) dt. \quad (24)\end{aligned}$$

Таким образом,

$$S(t, \omega, \varphi) = \frac{2E_c}{E_{\Sigma}} \Psi_0(\tau, \Delta\omega, \Delta\varphi) = R \Psi_0(\tau, \Delta\omega, \Delta\varphi). \quad (25)$$

Следовательно, при принятом ранее допущении $R \gg 1$ можно считать, что выходной сигнал при оптимальной фильтрации является, с точностью до постоянного множителя R , нормированной автокорреляционной функцией входного сигнала.

Так как оценку разрешающей способности всегда ведут по выходному эффекту приемника, то при желании оценить разрешающую способность необходимо найти автокорреляционную функцию входного сигнала и все дальнейшие рассуждения связывать с ней.

Пусть на входе приемника имеются два сигнала A и B (рис. 28,а), имеющие некоторое различие $\Delta\alpha$ в параметре $\alpha(t, \omega$ или $\varphi)$. Выходные сигналы A' и B' показаны отдельно соответственно на рис. 28,б и в. Они сдвинуты на ту же величину $\Delta\alpha$ и отличаются длительностью от соответствующих входных сигналов вследствие прохождения через оптимальный фильтр.

Ставится вопрос, каково наименьшее значение $\Delta\alpha$, при котором выходные сигналы будут разрешены. Для ответа надо проследить за тем, что происходит с сигналами в области их взаимного наложения $\delta\alpha$. При случайных фазовых соотношениях суммарный сигнал в этой области будет флуктуировать по амплитуде. На рис. 29, а, б, в изображены последовательные положения выходных сигналов (показаны их огибающие) при уменьшении $\Delta\alpha$, соответствующие пересечению их огибающих на уровне, меньшем 0,5, равном 0,5 и большем 0,5 от максимума, для разности фаз высокочастотного заполнения 0 и 180°.

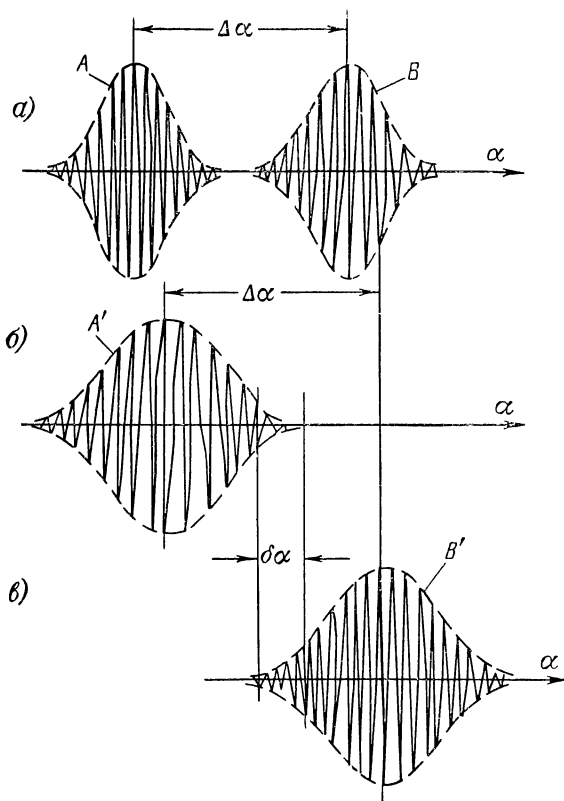


Рис. 28. Сигналы A и B , имеющие сдвиг $\Delta\alpha$ по параметру α на входе оптимального фильтра (а). Соответствующие сигналы A' и B' на выходе оптимального фильтра (б, в).

В первом случае (рис. 29,а) огибающая суммарного сигнала при любой разности фаз будет иметь явно выраженную седловину, разделяющую максимумы. Условимся считать, что при таком виде огибающей всегда будет уверенное разрешение.

В случае рис. 29,б огибающая суммарного сигнала может иметь не только седловину, но при разности фаз, близкой к нулю, будет походить на огибающую одного сигнала большой длительности. Таким образом, при пересечении огибающих на уровне, большем 0,5, достоверное разрешение будет невозможно и возникнет определенная вероятность ошибочного решения.

Случай при пересечении огибающих выходных сигналов на уровне, равном 0,5 от максимума (рис. 29,б), является граничным. При разности фаз, равной нулю, ордината, огибающая в точке α_{cp} , будет приблизительно

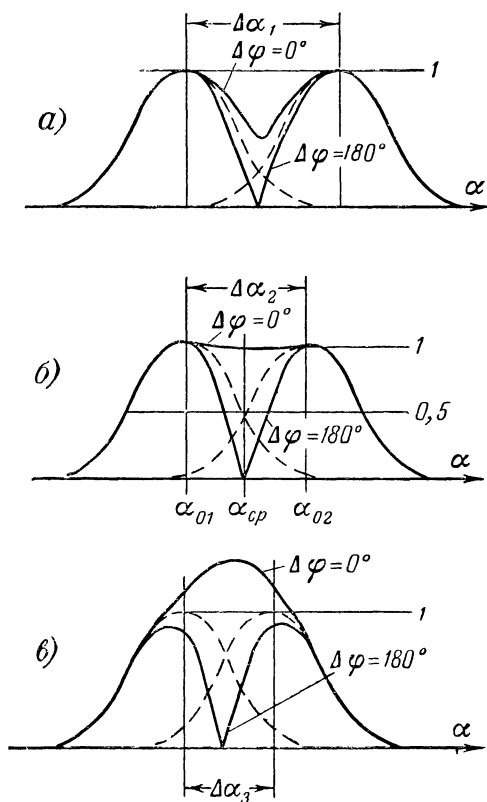


Рис. 29. Выходные сигналы оптимального фильтра.

а — при наложении на уровне, меньшем 0,5 от максимума; *б* — при наложении на уровне, равном 0,5; *в* — при наложении на уровне, большем 0,5.

равна значению огибающей в точках α_{01} и α_{02} и суммарный сигнал не будет иметь явно выраженной седловины, облегчающей разрешение. Но вероятность такой ситуации теоретически равна нулю. При всех других разностях фаз седловина будет более или менее явно выражена и будет обеспечено достоверное разрешение.

Итак, при пересечении огибающих на уровне 0,5 и меньших при принятом условии будет достигнуто достоверное разрешение. При пересечении на уровнях, больших 0,5, возникает вероятность ошибочного решения, увеличивающаяся по мере сближения сигналов. Поэтому для количественной оценки разрешающей способности будем считать, что предельно малым различием в параметре разрешения будет такая величина $\Delta\alpha_2$ (рис. 29,б), при которой огибающие выходных сигналов будут пересекаться на уровне 0,5 от максимума.

Конечно, этот критерий разрешения сигналов является условным и неполным, однако при его использовании оценка разрешающей способности проста и получается близкой к практическим результатам. Из рис. 29,б нетрудно видеть, что при использовании этого критерия разрешение будет осуществляться при относительном сдвиге по параметру α , равному ширине выходного сигнала, отсчитанной на уровне 0,5 от максимума.

Следовательно, для вычисления потенциальной разрешающей способности при одинаковых входных сигналах надо по сигналу на входе найти выходной сигнал и вычислить ширину последнего по разрешаемому параметру на уровне 0,5 от максимума — это и будет количественной оценкой потенциальной разрешающей способности для сигналов данного вида. Так как выходной сигнал при оптимальной обработке есть автокорреляционная функция входного, то, иными словами, надо найти ширину автокорреляционной функции на уровне 0,5 от ее максимума. Очевидно, что потенциальная разрешающая способность по какому-либо параметру α будет тем выше, чем уже автокорреляционная функция сигнала по этому параметру.

13. Потенциальная разрешающая способность по времени

Применим методику § 12 к оценке разрешающей способности по времени. Из выражения (24), полагая $\Delta\omega=0$ и $\Delta\varphi=0$, т. е. считая, что принимаемый сигнал отличается от опорного только лишь сдвигом по времени, получим нормированную автокорреляционную функцию по времени:

$$\Psi_0(\tau) = \frac{1}{E_c} \int_0^{T_n} u_c(t) u_c(t - \tau) dt. \quad (26)$$

В комплексной записи (которая является в данном случае более удобной из-за простоты последующих математических выкладок) нормированная функция автокорреляции по времени имеет вид:

$$\Psi_0(\tau) = \frac{1}{2E_c} \operatorname{Re} \int_0^{T_H} \dot{u}_c(t) \dot{u}_c^*(t - \tau) dt^*. \quad (26a)^*$$

Здесь $1/2E_c$ — нормирующий множитель;

Re — символ, указывающий, что от выражения после него надо взять лишь действительную часть (Re — от французского *réel* — действительный);

$\dot{u}_c(t)$ — входной сигнал в комплексной записи;

$\dot{u}_c^*(t - \tau)$ — сопряженный входному опорный сигнал, сдвинутый на τ по времени и также записанный в комплексной форме.

Записываем сигналы в виде

$$\dot{u}_c(t) = \dot{F}(t) \exp(j\omega t); \quad (27)$$

$$\dot{u}_c^*(t - \tau) = \dot{F}^*(t - \tau) \exp[-j\omega(t - \tau)], \quad (28)$$

где $\dot{F}(t)$ и $\dot{F}^*(t - \tau)$ — комплексные амплитуды входного и сопряженного опорного сигналов.

Подставляя (27) и (28) в (26,а), получим:

$$\Psi_0(\tau) = \frac{1}{2E_c} \operatorname{Re} \exp(j\omega\tau) \int_0^{T_H} F(t) \dot{F}^*(t - \tau) dt. \quad (29)$$

Действительная часть интеграла дает автокорреляционную функцию огибающей входного сигнала, а экспоненциальный множитель характеризует высокочастотное заполнение. Обычно в реальных радиотехнических устройствах используются продетектированные сигналы. При принятом нами допущении $R \gg 1$ и больших амплитудах сигнала на входе детектора ($u_{\text{вх}} \gg 1 \div 2$ в) выходной сигнал повторяет огибающую радиосигнала на вы-

* Формулы (26) и (26а) дают одинаковые результаты, если не учитывать (что обычно и делают) вследствие малости дополнительные члены, получающиеся при вычислении по формуле (26).

ходе оптимального фильтра. Поэтому в дальнейшем будем анализировать автокорреляционную функцию огибающей входного сигнала

$$|\Psi_0(\tau)| = \frac{1}{2E_c} \operatorname{Re} \int_0^{\tau_n} F(t) F^*(t - \tau) dt. \quad (30)$$

Это выражение и будет служить исходным для анализа сигналов конкретного вида.

Определим потенциальную разрешающую способность по времени при входном сигнале в виде импульса длительностью τ_n с прямоугольной формой огибающей. В этом случае (рис. 30, а, б)

$$\dot{F}(t) = A \text{ при } -\frac{\tau_n}{2} \leq t \leq \frac{\tau_n}{2}; \quad (31)$$

$$\dot{F}^*(t - \tau) = A \text{ при } -\frac{\tau_n}{2} \pm \tau \leq t \leq \frac{\tau_n}{2} \pm \tau. \quad (32)$$

Подставляя (31) и (32) в (30) и интегрируя в интервале совместного существования сигналов, получим

$$|\Psi_0(\tau)| = \frac{A^2}{2E_c} \int_{-0,5\tau_n + \tau}^{0,5\tau_n} dt = \frac{A^2}{2E_c} (\tau_n - \tau) = \frac{A^2\tau_n}{2E_c} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_n}\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{A^2\tau_n}{2} = E_c,$$

и принимая во внимание абсолютную величину сдвига $|\tau|$, получим нормированную автокорреляционную функцию огибающей по времени:

$$|\Psi_0(\tau)| = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_n}. \quad (33)$$

Вид функции (33) изображен на рис. 30, в. Найдем ее ширину на уровне 0,5:

$$|\Psi_0(\tau_{0,5})| = 1 - \frac{|\tau_{0,5}|}{\tau_n} = 0,5.$$

Отсюда

$$|\tau_{0,5}| = 0,5 \tau_n$$

и ширина

$$\delta(t)_{\text{пот}} = 2|\tau_{0,5}| = \tau_{\text{ш}}. \quad (34)$$

Выражение (34) и определяет потенциальную разрешающую способность по времени для входных сигналов в виде радиопульсов с прямоугольной формой огибающей.

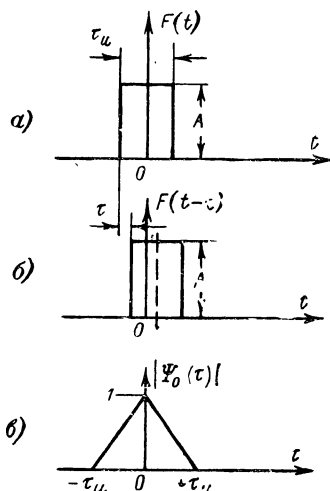


Рис. 30. Огибающая входного сигнала $F(t)$ (а); огибающая опорного сигнала $F(t-\tau)$ (б); корреляционная функция огибающей $|\Psi_0(\tau)|$ (в).

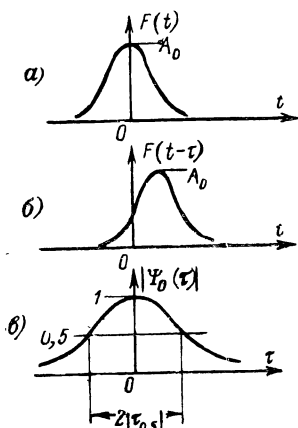


Рис. 31. Огибающая входного сигнала гауссовой формы (а); огибающая опорного сигнала (б); корреляционная функция огибающей (в).

Найдем потенциальную разрешающую способность при входном сигнале в виде импульса с гауссовой формой огибающей. В этом случае (рис. 31, а, б)

$$\dot{F}(t) = A_0 \exp(-\gamma^2 t^2); \quad (35)$$

$$\dot{F}^*(t-\tau) = A_0 \exp[-\gamma^2 (t-\tau)^2]. \quad (36)$$

Подставляя (35) и (36) в (30), получим:

$$|\Psi_0(\tau)| = \frac{A_0^2}{2E_0} \int_0^\infty \exp(-\gamma^2 t^2) \exp[-\gamma^2 (t-\tau)^2] dt.$$

Преобразовывая подынтегральное выражение, получим:

$$|\Psi_0(\tau)| = \frac{A_0^2}{2E_c} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\sqrt{2}\gamma\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]^2\right\} dt.$$

Интеграл в правой части при замене $t - \frac{\tau}{2} = x$ и $\sqrt{2}\gamma = q$ приводится к табличному виду [Л. 8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-q^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q}.$$

Учитывая это, получим:

$$|\Psi_0(\tau)| = \frac{A_0^2 \sqrt{\pi}}{2E_c \sqrt{2}\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right). \quad (37)$$

Множитель перед экспонентой равен единице, так как для радиопульса гауссовой формы (см. § 6)

$$E_c = \frac{A_0^2 \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{2}\gamma} \quad (38)$$

и

$$|\Psi_0(\tau)| = \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right). \quad (39)$$

Вид $|\Psi_0(\tau)|$ показан на рис. 31, в. Ширина $|\Psi_0(\tau)|$ на уровне 0,5 равна:

$$\delta(t)_{\text{пот}} = 2|\tau_{0,5}| = \frac{2\sqrt{2 \ln 2}}{\gamma}. \quad (40)$$

Учитывая, что $\gamma = \sqrt{\pi}/\tau_n$, получим:

$$\delta(t)_{\text{пот}} = 2|\tau_{0,5}| = \frac{2\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{\pi}} \tau_n \approx 1,3\tau_n. \quad (41)$$

Выражение (41) определяет потенциальную разрешающую способность по времени для входных сигналов в виде импульсов с гауссовой формой огибающей.

Анализируя выражения (34) и (41), заключаем, что повышение разрешающей способности по времени для рассмотренных видов сигналов может быть достигнуто

путем уменьшения длительности импульсов. Однако такой путь приводит к уменьшению энергии сигналов, а следовательно, и к уменьшению дальности действия радиотехнических устройств. Возникает вопрос, нельзя ли примирить эти противоречия. Решение может быть получено путем применения модулированных сигналов. Сигнал, модулированный по какому-либо параметру (частоте, фазе, амплитуде), имеет всегда более широкий спектр, чем немодулированный. Но сигнал с более широким спектром имеет более узкую автокорреляционную функцию. Это вытекает из соотношения Хинчина — Винера [Л. 9]. Следовательно, и разрешающая способность, оцениваемая шириной автокорреляционной функции входного сигнала, будет лучше у модулированного сигнала, чем у немодулированного той же длительности. Покажем это, вычислив разрешающую способность для сигнала в виде радиоимпульса с огибающей гауссовой формы и внутриимпульсной линейной частотной модуляцией.

Пусть закон изменения частоты имеет вид:

$$\omega(t) = \omega + \frac{\Delta\omega_m}{\tau_n} t, \quad (42)$$

где ω — начальное значение несущей частоты;

$\Delta\omega_m$ — девиация частоты.

Фаза колебаний в момент t :

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(\xi) d\xi = \omega t + \frac{\Delta\omega_m}{2\tau_n} t^2 = \omega t + b t^2, \quad (43)$$

где

$$b = \frac{\Delta\omega_m}{2\tau_n} \quad (44)$$

— коэффициент, характеризующий скорость изменения частоты.

Частотно-модулированный сигнал с учетом (43) и (44) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}_c(t) &= A_0 \exp(-\gamma^2 t^2) \exp[j(\omega t + b t^2)] = \\ &= A_0 \exp[-(\gamma^2 - j b) t^2] \exp(j \omega t) = \dot{F}(t) \exp(j \omega t), \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\dot{F}(t) = A_0 \exp[-(\gamma^2 - j b) t^2] \quad (46)$$

— комплексная амплитуда частотно-модулированного (по линейному закону) входного сигнала.

Сопряженный опорный сигнал имеет вид;

$$u^*_c(t - \tau) = \dot{F}^*(t - \tau) \exp[-j\omega(t - \tau)], \quad (47)$$

где

$$\dot{F}^*(t - \tau) = A_0 \exp[-(\gamma^2 + jb)(t - \tau)^2] \quad (48)$$

— комплексная амплитуда сопряженного опорного сигнала. Подставляя (46) и (48) в (30) и преобразовывая, получим:

$$\begin{aligned} |\Psi_0(\tau)| &= \frac{A_0^2}{2E_c} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \times \\ &\times \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[V\sqrt{2}\gamma\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]^2\right\} \exp\left[j2b\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] dt. \end{aligned}$$

Оставляя лишь действительную часть, получим:

$$\begin{aligned} |\Psi_0(\tau)| &= \frac{A_0^2}{2E_c} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[V\sqrt{2}\gamma\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]^2\right\} \cos 2b\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Заменами $t - \frac{\tau}{2} = x$, $V\sqrt{2}\gamma = q$ и $2b\tau = p$ интеграл приводится к виду [Л. 6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-q^2 x^2) \cos px dx = \frac{V\pi}{q} \exp\left(-\frac{p^2}{4q^2}\right).$$

Используя это обстоятельство, получим:

$$|\Psi_0(\tau)| = \frac{A_0^2}{2E_c} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \frac{V\pi}{\sqrt{2}\gamma} \exp\left(-\frac{b^2 \tau^2}{2\gamma^2}\right).$$

Учитывая (38), получим выражение для нормированной автокорреляционной функции огибающей частотно-модулированного (по линейному закону) сигнала:

$$|\Psi_0(\tau)| = \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{b^2 \tau^2}{2\gamma^2}\right). \quad (49)$$

Потенциальная разрешающая способность по времени для этого вида сигналов определяется выражением

$$\delta(t)_{\text{пот}} = 2|\tau_{0,5}| = \frac{2\gamma\sqrt{2\ln 2}}{\gamma^4 + b^2}. \quad (50)$$

Сравнение (50) и (40) указывает на «сжатие» по времени выходного сигнала при частотно-модулированном входном по сравнению с обычным немодулированным. Коэффициент сжатия найдем при делении (40) на (50):

$$k_{\text{сж}} = \frac{\gamma\sqrt{\gamma^4 + b^2}}{\gamma^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{\gamma^4}}. \quad (51)$$

Подставляя в (50) значения b (44) и $\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{\tau_{\text{н}}}$, имеем:

$$k_{\text{сж}} = \sqrt{1 + (\Delta f_{\text{м}} \tau_{\text{н}})^2}, \quad (52)$$

где

$$\Delta f_{\text{м}} = \frac{\Delta \omega_{\text{м}}}{2\pi}.$$

Учитывая, что практически всегда $\Delta f_{\text{м}} \tau_{\text{н}} \gg 1$, получим:

$$k_{\text{сж}} \approx \Delta f_{\text{м}} \tau_{\text{н}}. \quad (53)$$

Если в (50) подставить (51), получим другую формулу для оценки разрешающей способности при линейном частотно-модулированном сигнале:

$$\delta(t)_{\text{пот}} = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\gamma k_{\text{сж}}} \approx 1,3 \frac{\tau_{\text{н}}}{k_{\text{сж}}} \approx \frac{1,3}{\Delta f_{\text{м}}}. \quad (54)$$

Следовательно, при заданной длительности входного сигнала (выбранной, например, по соображению получения нужной энергии) можно получить в принципе сколько угодно большое разрешение по времени, если неограниченно расширять спектр входного сигнала путем увеличения девиации частоты. При этом, конечно, необходимо выдерживать условия оптимальной фильтрации.

Так как всякая дополнительная модуляция сигнала приводит к расширению его спектра, а следовательно, и к сужению его автокорреляционной функции, то применение частотной модуляции не является единственным методом повышения разрешающей способности по вре-

мени. Для этой цели могут быть применены любые виды модуляции сигнала: амплитудная, фазовая и т. д.

Оценим теперь на конкретном примере порядок величин. Пусть задана длительность гауссова импульса $\tau_{\text{и}} = 100$ мксек, а надо получить потенциальную разрешающую способность по времени $\delta(t)_{\text{пот}} = 1$ мксек. Какая девиация частоты необходима для требуемого сжатия выходного сигнала?

Коэффициент сжатия находим из формулы (54):

$$k_{\text{сж}} = 1,3 \frac{\tau_{\text{и}}}{\delta(t)_{\text{пот}}} = 1,3 \frac{100 \cdot 10^{-6}}{10^{-6}} = 130.$$

Для получения такого коэффициента сжатия нужна девиация частоты

$$\Delta f_{\text{м}} = \frac{k_{\text{сж}}}{\tau_{\text{и}}} = \frac{130}{100 \cdot 10^{-6}} = 1,3 \text{ Мгц.}$$

14. Потенциальная разрешающая способность по частоте

Рассмотрим теперь разрешающую способность по частоте. Для этого вычислим автокорреляционную функцию по частоте и определим ее ширину на уровне 0,5.

Термин «автокорреляционная функция по частоте» введен здесь условно по аналогии с обычной автокорреляционной функцией по времени, причем сдвигу по времени соответствует сдвиг по частоте. Из выражения (22), считая $\tau=0$ и $\Delta\varphi=0$, применяя комплексную запись и нормировку, получим:

$$\Psi_{\text{о}}(\Delta\omega) = \frac{1}{2E_{\text{с}}} \operatorname{Re} \int_0^{T_{\text{и}}} \dot{u}_{\text{с}}(t; \omega) \dot{u}_{\text{с}}^*(t; \omega + \Delta\omega) dt. \quad (55)$$

Принимаем выходной сигнал в виде импульса гауссовой формы:

$$\dot{u}_{\text{с}}(t; \omega) = \dot{F}(t) \exp(j\omega t); \quad (56)$$

$$\dot{u}_{\text{с}}^*(t; \omega + \Delta\omega) = \dot{F}^*(t) \exp[-j(\omega + \Delta\omega)t], \quad (57)$$

где

$$\dot{F}(t) = \dot{F}^*(t) = A_0 \exp(-\gamma^2 t^2). \quad (35)$$

Подставляя (56) и (57) в (55), получим:

$$\begin{aligned} |\Psi_0(\Delta\omega)| &= \frac{A_0^2}{2E_c} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\gamma^2 t^2) \exp(-j\Delta\omega t) dt = \\ &= \frac{A_0^2}{2E_c} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(V\sqrt{2}\gamma t)^2] \cos \Delta\omega t dt. \end{aligned}$$

Заменяя $V\sqrt{2}\gamma$ через q , придем к уже встречавшемуся интегралу:

$$\begin{aligned} |\Psi_0(\Delta\omega)| &= \frac{A_0^2}{2E_c} \int \exp(-q^2 t^2) \cos \Delta\omega t dt = \\ &= \frac{A_0^2}{2E_c} \frac{\sqrt{\pi}}{q} \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2}{4q^2}\right). \end{aligned}$$

Подставляя значение q и учитывая (38), получим:

$$|\Psi_0(\Delta\omega)| = \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2}{8\gamma^2}\right). \quad (58)$$

Ширина $|\Psi_0(\Delta\omega)|$ на уровне 0,5 от максимума равна:

$$\delta(\omega)_{\text{пот}} = 2|\Delta\omega_{0,5}| = 4V\sqrt{2\ln 2}\gamma \approx \frac{8,3}{\tau_{\text{и}}}. \quad (59)$$

Выражение (59) является оценкой потенциальной разрешающей способности по частоте для сигналов гауссовой формы.

Если проделать аналогичные вычисления для входного сигнала в виде импульса с прямоугольной огибающей, то получим, что

$$\delta(\omega)_{\text{пот}} \approx \frac{7,6}{\tau_{\text{и}}}. \quad (60)$$

Выражения (59) и (60) показывают, что при немодулированных сигналах разрешение по частоте обратно пропорционально длительности сигнала и может быть улучшено при ее увеличении. Проводя вычисления значений $\delta(\omega)_{\text{пот}}$ для частотно-модулированных сигналов с теми же огибающими, получим результаты, совпадающие с (59) и (60). Введение модуляции не меняет потенци-

альную разрешающую способность по частоте, и она зависит только от длительности сигнала. Этому обстоятельству ниже будет дано объяснение.

15. Одновременное разрешение по времени и частоте. Принцип неопределенности в радиотехнике

До сих пор мы рассматривали потенциальную разрешающую способность только по одному какому-либо параметру — либо по времени, либо по частоте. Если рассматривалось разрешение по времени, то принималось, что сдвиг по частоте принимаемых сигналов по отношению к опорному равен нулю, а так как частота опорного сигнала известна, то, следовательно, рассматривалось разрешение по времени при известной частоте. При разрешении по частоте принимался равным нулю сдвиг по времени, т. е. рассматривалось разрешение по частоте при известном времени прихода сигналов. В реальных случаях чаще всего и частота, и время прихода принимаемых сигналов точно неизвестны. С таким положением встречаются в радиолокации в случаях обнаружения движущихся целей при появлении доплеровского смещения частоты и неизвестной дальности до цели. Поэтому очень важно рассмотреть случай одновременного разрешения по времени и частоте. Выходной сигнал при таких условиях может быть получен из выражения (22) при $\Delta\varphi=0$. Применяя комплексную запись и нормировку по энергии, имеем:

$$\Psi_0(\tau, \Delta\omega) = \frac{1}{2E_c} \operatorname{Re} \int_0^{T_n} \dot{u}_c(t; \omega) \dot{u}^*(t - \tau; \omega + \Delta\omega) dt. \quad (61)$$

Найдем значение (61) для импульса гауссовой формы с внутриимпульсной линейной частотной модуляцией. Входной сигнал имеет вид (45) и (46), а сопряженный опорный сигнал записываем в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}^*(t - \tau; \omega + \Delta\omega) &= \dot{F}^*(t - \tau) \times \\ &\times \exp[-j(\omega + \Delta\omega)(t - \tau)], \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\dot{F}^*(t - \tau) = A_0 \exp[-(\gamma^2 + jb)(t - \tau)^2]. \quad (63)$$

Подставляя (45) и (62) в (61), получим после преобразований:

$$\Psi_0(\tau, \Delta\omega) = \frac{A_0^2}{2E_c} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2\gamma^2 t^2 + 2\gamma^2 \tau t - \gamma^2 \tau^2 + j2b\tau t - jb\tau^2 + j(\omega + \Delta\omega)\tau - j\Delta\omega t] dt.$$

Вынося за знак интеграла члены, не зависящие от t (за исключением $e^{-\gamma^2 \tau^2}$), имеем:

$$\Psi_0(\tau, \Delta\omega) = \frac{A_0^2}{2E_c} \operatorname{Re} \exp(-jb\tau^2) \exp[j(\omega + \Delta\omega)\tau] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-2\gamma^2 \left(t^2 - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\right] \exp[j(2b\tau - \Delta\omega)t] dt.$$

Дополняя показатель первого экспоненциального множителя под интегралом до полного квадрата, получим:

$$\Psi_0(\tau, \Delta\omega) = \frac{A_0^2}{2E_c} \operatorname{Re} \exp\{j[(\omega + \Delta\omega) - b\tau]\tau\} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\sqrt{2}\gamma\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]^2\right\} \times \\ \times \exp[j(2b\tau - \Delta\omega)t] dt = \frac{A_0^2}{2E_c} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \cos[(\omega + \Delta\omega) - b\tau]\tau \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\sqrt{2}\gamma\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]^2\right\} \cos(2b\tau - \Delta\omega)t dt - \\ - \frac{A_0^2}{2E_c} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \sin[(\omega + \Delta\omega) - b\tau]\tau \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\sqrt{2}\gamma\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]^2\right\} \sin(2b\tau - \Delta\omega)t dt.$$

Путем замены переменных в подынтегральном выражении

$$t - \frac{\tau}{2} = x, \quad \sqrt{2}\gamma = q,$$

$$2b\tau - \Delta\omega = p, \quad \frac{\tau}{2} = \lambda$$

интегралы приводятся соответственно к виду [Л. 6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-q^2 x^2) \cos p(x + \lambda) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \exp\left(-\frac{p^2}{4q^2}\right) \cos p\lambda$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-q^2 x^2) \sin p(x + \lambda) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \exp\left(-\frac{p^2}{4q^2}\right) \sin p\lambda.$$

Производя обратную замену и принимая во внимание, что

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta),$$

получим:

$$\begin{aligned} \Psi_0(\tau, \Delta\omega) = & \frac{A_0^2}{2E_c} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{(2b\tau - \Delta\omega)^2}{8\gamma^2}\right] \times \\ & \times \cos\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) \tau. \end{aligned}$$

Учитывая (38) и отбрасывая $\cos\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) \tau$, характеризующий высокочастотное заполнение, получим окончательное выражение для смешанной нормированной автокорреляционной функции огибающей входного сигнала:

$$|\Psi_0(\tau, \Delta\omega)| = \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{(2b\tau - \Delta\omega)^2}{8\gamma^2}\right]. \quad (64)$$

Вид этой функции показан на рис. 32. С геометрической точки зрения она представляет собой куполообразную поверхность, приподнятую над плоскостью $(\tau, \Delta\omega)$. Сечения этой поверхности плоскостями $\Delta\omega = \text{const}$ представляют сигнал на выходе оптимального фильтра как функцию времени при различных сдвигах частоты входного сигнала относительно резонансной частоты фильтра.

Сечения плоскостями $\tau = \text{const}$ представляют зависимость амплитуды выходного сигнала от сдвига частоты

входного относительно резонансной частоты фильтра, для конкретного момента времени. Эта зависимость совпадает с амплитудным спектром входного сигнала, имеющего длительность $\tau_{\text{и}} = |\tau|$.

Следует обратить внимание на то, что выражение (64) включает все ранее полученные подобные выражения (39), (49) и (58). Действительно, полагая в (64)

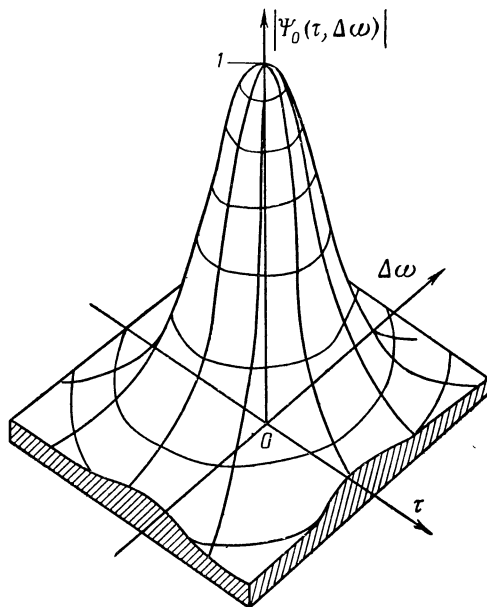


Рис. 32. Геометрическое представление смешанной автокорреляционной функции одиночного сигнала.

$b=0$ и $\Delta\omega=0$, получим нормированную автокорреляционную функцию по времени огибающей немодулированного импульса (39); полагая $\Delta\omega=0$, получим (49) — ту же функцию, но для импульса с линейной частотной модуляцией; полагая $\tau=0$, получим нормированную автокорреляционную функцию огибающей по частоте — (58).

Вид $|\Psi_0(\tau, \Delta\omega)|$ позволяет сделать общий вывод, что одновременно разрешение по времени и частоте будет тем лучше, чем острее пик в центре плоскости $(\tau, \Delta\omega)$, чем меньше объем, заключенный под поверхностью $|\Psi_0(\tau, \Delta\omega)|$, «растекается» по плоскости $(\tau, \Delta\omega)$. Идеаль-

ной была бы форма в виде очень узкого пика, стоящего в начале координат. Приближение к такой форме выходного сигнала может быть получено при шумоподобном входном сигнале с большим произведением длительности на ширину спектра. Вопросы формирования таких сигналов рассматриваются в специальной литературе (см. например, [Л. 10]).

Анализ одновременного разрешения по времени и частоте нагляднее всего вести по сечению поверхности $|\Psi_0(\tau, \Delta\omega)|$ плоскостью, параллельной плоскости $(\tau, \Delta\omega)$ и проведенной на уровне 0,5 от максимума. Это сечение описывается уравнением

$$\exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{(2b\tau - \Delta\omega)^2}{8\gamma^2}\right] = 0,5.$$

Логарифмируя и преобразуя, получим:

$$-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2} - \frac{(2b - \Delta\omega)^2}{8\gamma^2} = -\ln 2;$$

$$(\gamma^4 + b^2)\tau^2 - b\tau\Delta\omega + \frac{\Delta\omega^2}{4} - 2\gamma^2 \ln 2 = 0. \quad (65)$$

Уравнение (65) описывает кривую второго порядка. Проводя его анализ [Л. 8], находим, что кривая является эллипсом, оси которого повернуты относительно осей τ и $\Delta\omega$ на угол α , причем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b}{1/4 - (\gamma^4 + b^2)}.$$

На рис. 33 приведен эллипс (65) при $b=0$ ($\alpha=0$) и $b \neq 0$. Диаметр эллипса, совпадающий с осью τ , определяет величину потенциальной разрешающей способности по дальности при известной частоте приходящего сигнала (при $\Delta\omega=0$). Полагая в (65) $\Delta\omega=0$, получим: для $b=0$

$$\tau_{0,5} = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\gamma} \text{ и } \delta(t)_{\text{пот}} = 2|\tau_{0,5}| = \frac{2\sqrt{2 \ln 2}}{\gamma} = 1,3\tau_{\text{н}}$$

и для $b \neq 0$

$$\tau_{0,5} = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\gamma^4 + b^2}} \gamma$$

и

$$\delta(t)_{\text{пот}} = \frac{2\gamma \sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{\gamma^4 + b^2}} = 1,3 \frac{\tau_n}{k_{сж}},$$

что совпадает с полученными ранее результатами (41) и (54).

Диаметр эллипса, совпадающий с осью $\Delta\omega$, определяет величину потенциальной разрешающей способно-

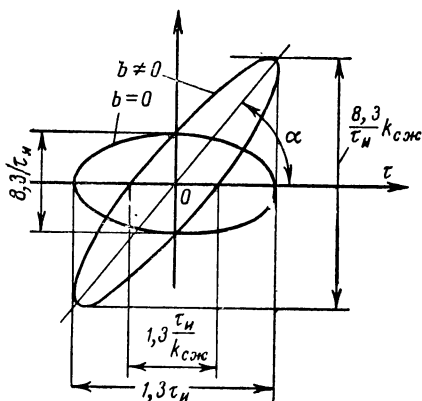


Рис. 33. Сечение смешанной автокорреляционной функции одиночного сигнала.

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{1/4 - (\gamma^4 + b^2)}.$$

сти по частоте при известном времени прихода сигнала (при $\tau=0$). Полагая в (65) $\tau=0$, получим:

$$\Delta\omega_{0,5} = 2\sqrt{2 \ln 2} \gamma;$$

$$\delta(\omega)_{\text{пот}} = 2|\Delta\omega_{0,5}| = 4\sqrt{2 \ln 2} \gamma = \frac{8,3}{\tau_n},$$

что совпадает с (59).

На рис. 34, а, б показано взаимное расположение сечений двух разрешаемых выходных сигналов, соответствующее разрешению только по времени (рис. 34, а) и только по частоте (рис. 34, б). При необходимости одновременного разрешения и по времени и по частоте при неизвестных сдвигах τ и $\Delta\omega$ следует ориентироваться на наиболее неблагоприятные условия разрешения, по-

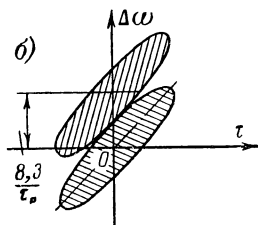
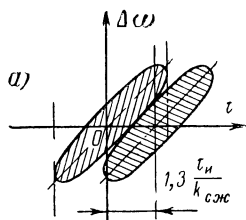


Рис. 34. Взаимное расположение выходных сигналов при разрешении.

a — по времени при известной частоте; *б* — при частоте при известном времени прихода.

Размах эллипса по оси $\Delta\omega$. Для этого разрешаем уравнение (65) относительно $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = 2b\tau \pm \sqrt{4b^2\tau^2 - 4\tau^2(\gamma^4 + b^2) + 8\gamma^2 \ln 2}. \quad (66)$$

Дифференцируя по τ , получим:

$$\frac{d(\Delta\omega)}{d\tau} = 2b \pm \frac{8b^2\tau - 8\tau(\gamma^4 + b^2)}{2\sqrt{4b^2\tau^2 - 4\tau^2(\gamma^4 + b^2) + 8\gamma^2 \ln 2}}.$$

Приравнивая производную нулю и решая уравнение относительно τ , будем иметь:

$$\tau(\Delta\omega_{\text{макс}}) = \frac{b\sqrt{2\ln 2}}{\gamma\sqrt{\gamma^4 + b^2}};$$

$$\tau(\Delta\omega_{\text{мин}}) = -\frac{b\sqrt{2\ln 2}}{\gamma\sqrt{\gamma^4 + b^2}}.$$

Подставляя эти значения в (66), получим:

$$\Delta\omega_{\text{макс}} = 2\sqrt{2\ln 2}\gamma k_{\text{сжс}};$$

$$\Delta\omega_{\text{мин}} = -2\sqrt{2\ln 2}\gamma k_{\text{сжс}}.$$

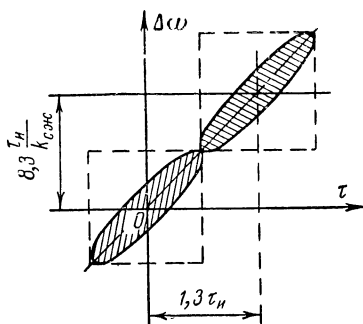


Рис. 35. Взаимное расположение выходных сигналов при разрешении при неизвестных времени прихода и частоте.

казанные на рис. 35. В этом случае разрешение по какой-либо координате определяется всем «размахом» эллипса по этой координате. Размах может быть найден решением уравнения (65) на максимум — минимум значений τ и $\Delta\omega$. Найдем в качестве примера

Полный «размах» эллипса по оси частот, определяющий величину потенциальной разрешающей способности по частоте при неизвестном времени прихода сигнала, равен:

$$\begin{aligned}\delta(\omega)_{\text{шот}} &= \Delta\omega_{\text{макс}} + |\Delta\omega_{\text{мин}}| = \\ &= 4\sqrt{2\ln 2} \gamma k_{\text{сж}} = \frac{8,3}{\tau_{\text{ш}}} k_{\text{сж}}.\end{aligned}\quad (67)$$

Аналогично может быть определен размах по оси времени. Он оказывается равным диаметру эллипса для немодулированного сигнала (41), т. е.

$$\delta(t)_{\text{шот}} = \tau_{\text{макс}} + |\tau_{\text{мин}}| = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\gamma} = 1,3\tau_{\text{ш}}.$$

Полученные результаты показывают, что при одновременном разрешении по времени и частоте применение частотно-модулированных сигналов не улучшает разрешения по времени, как это имело место при разрешении только по одному параметру, и ухудшает в $k_{\text{сж}}$ раз разрешение по частоте. При увеличении девиации частоты «размах» эллипса по оси $\Delta\omega$ увеличивается, сам эллипс все более вытягивается по оси $\Delta\omega$ и поворачивается относительно осей координат. При $b \rightarrow \infty$ угол $\alpha \rightarrow \pi/2$, эллипс вырождается в вертикальную линию. При этом разрешение по частоте теряется.

У читателя может сложиться мнение, что применение модулированных сигналов не дает никакого выигрыша и в том случае, когда разрешение производится только по времени, поскольку частота принимаемого сигнала практически никогда не известна из-за доплеровского смещения при относительном перемещении передатчика (или передизлучателя) и приемника, из-за случайных уходов частоты и т. д. Однако если эти смещения частоты малы по сравнению с шириной спектра сигнала, то проигрыш в разрешении по сравнению с идеальным случаем ($\Delta\omega = 0$) будет незначительным.

Применим полученные соотношения для решения примера. Пусть задан входной сигнал в виде колокольного импульса с внутримпульсной частотной модуляцией, причем

$$\tau_{\text{ш}} = 100 \text{ мксек};$$

$$\Delta f = 1,3 \text{ МГц},$$

Требуется найти потенциальную разрешающую способность по времени и частоте при одновременном разрешении. Используя формулы (53), (41), (67), находим:

$$k_{\text{сж}} = 1,3 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 130;$$

$$\delta(t)_{\text{пот}} = 1,3 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 130 \text{ мксек};$$

$$\delta(\omega)_{\text{пот}} = \frac{8,3}{100 \cdot 10^{-6}} 130 = 10,8 \cdot 10^6 \text{ рад/сек}$$

или $\delta(f)_{\text{пот}} \approx 1,7 \text{ Мгц}$.

Объем, заключенный под поверхностью $|\Psi_0(\tau, \Delta\omega)|$, является постоянной величиной для любого вида сигнала. Математической формулировкой этого положения, называемого принципом неопределенности в радиотехнике, является равенство

$$\int_{\tau} \int_{\Delta\omega} |\Psi_0(\tau, \Delta\omega)| d\tau d(\Delta\omega) = 4\pi^* \quad (68)$$

или, учитывая, что $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$,

$$\int_{\tau} \int_{\Delta f} |\Psi_0(\tau, \Delta f)| d\tau d(\Delta f) = 2^*. \quad (69)$$

Покажем справедливость (68) и (69) для сигнала в виде импульса гауссовой формы с линейной частотной модуляцией. Подставляя (64) в (68), получим:

$$\int_{\tau} \int_{\Delta\omega} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{(2b\tau - \Delta\omega)^2}{8\gamma^2}\right] d\tau d(\Delta\omega).$$

Интегрируем вначале по $\Delta\omega$. Заменяя во втором множителе $2b\tau - \Delta\omega = x$ и $1/2\sqrt{2}\gamma = q$, получим интеграл по $\Delta\omega$ вида $\int_{\Delta\omega=-\infty}^{\Delta\omega=\infty} \exp(-q^2 x^2) dx$, равный $\frac{\sqrt{\pi}}{q} = 2\sqrt{2}\pi\gamma$.

Таким образом, должно производиться интегрирование по τ выражения

$$2\sqrt{2}\pi\gamma \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) d\tau.$$

* В литературе обычно рассматривается двойной интеграл от квадрата модуля смешанной автокорреляционной функции, что не меняет сути дела, а дает лишь вдвое меньше значения правых частей (68) и (69).

Поступая аналогично предыдущему, найдем, что интеграл равен $\frac{\sqrt{2\pi}}{\gamma}$. В результате двойного интегрирования имеем: $2 \sqrt{2\pi} \gamma \cdot \sqrt{2\pi} / \gamma = 4\pi$.

Принцип неопределенности устанавливает, что нельзя изменить объем «тела неопределенности», описываемого (64), путем подбора вида сигнала. Можно лишь перераспределить этот объем на плоскости $(\tau, \Delta\omega)$ так, чтобы добиться хорошего разрешения в какой-то части плоскости $(\tau, \Delta\omega)$. Ниже рассматривается один из возможных видов сигнала, благоприятный с точки зрения одновременного разрешения по времени и по частоте.

16. Потенциальная разрешающая способность по времени и частоте при сигнале в виде пачки когерентных импульсов

Как уже отмечалось, во многих практически важных случаях в радиотехнических устройствах используется конечная последовательность элементарных сигналов (пачка), содержащая обычно несколько единиц или десятков импульсов. Сигнал такого рода позволяет обеспечить необходимое превышение энергии сигнала над энергией шумов. Кроме того, если пачка обладает свойством когерентности, то сигнал дает лучшее разрешение по частоте по сравнению с одиночным импульсом.

Когерентной пачкой будем называть такую, в которой начальные фазы высокочастотных колебаний у всех N импульсов одинаковы и соблюдается условие

$$\omega T_n = 2\pi n, \quad (70)$$

где T_n — постоянный период следования элементарных сигналов;

n — целое число.

Сигнал в виде пачки может быть записан следующим образом:

$$\dot{u}_c(t; \omega) = \sum_{k=1}^{k=N} \dot{F}_k [t - (k-1)T_n] \exp(j\omega t), \quad (71)$$

а сопряженный опорный сигнал — в виде

$$u_c^*(t - \tau'; \omega + \Delta\omega) = \sum_{k=1}^{k=N} \dot{F}_k^*[t - (k-1)T_{\text{н}} - \tau'] \times \\ \times \exp[-j(\omega + \Delta\omega)(t - \tau')]. \quad (72)$$

Здесь k — номер импульса ($k=1, 2, 3, \dots, N$);

τ' — общий сдвиг опорного сигнала по времени, равный $\tau' = pT_{\text{н}} + \tau$;

p — число периодов, на которое осуществлен сдвиг,

$$p = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm N-1;$$

τ — сдвиг по времени в пределах длительности импульса $-\tau_{\text{н}} < \tau < \tau_{\text{н}}$;

\dot{F}_k — комплексная амплитуда k -го импульса.

Принимая элементарные сигналы одинаковой амплитуды и гауссовой формы, будем иметь:

$$\dot{F}_k[t - (k-1)T_{\text{н}}] = A_0 \exp[-(\gamma^2 - jb)] [t - (k-1)T_{\text{н}}]^2;$$

$$\dot{F}_k^*[t - (k-1)T_{\text{н}} - \tau'] = A_0 \exp[-(\gamma^2 + jb)] \times \\ \times [t - (k-1)T_{\text{н}} - \tau']^2.$$

На рис. 36 изображены две последовательности импульсов (71) и (72), причем для второй последовательности $p = +1$.

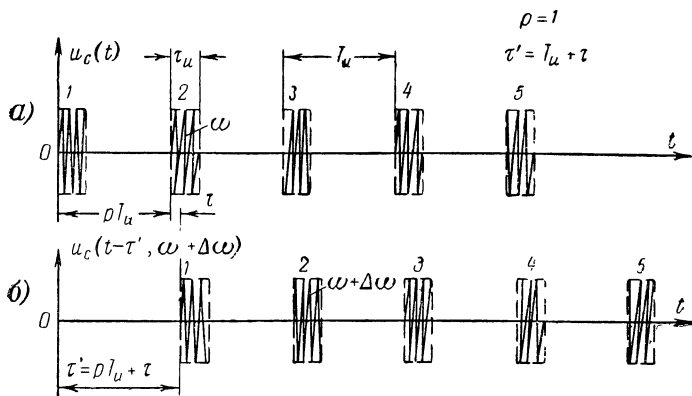


Рис. 36. Сигналы в виде пачки импульсов.
а — принимаемый; б — опорный.

Для оценки разрешающей способности вычислим автокорреляционную функцию рассматриваемого сигнала. Вычисление сводится к интегрированию суммы произведений импульсов, один из которых принадлежит первой последовательности, а другой — сдвинутой на время τ' второй последовательности, причем произведения должны быть взяты для всех возможных значений p . Для положительных значений p каждый импульс номера k второй последовательности должен быть умножен на импульс номера $k+p$ первой последовательности; для отрицательных значений p импульс номера k первой последовательности должен быть умножен на импульс номера $k+|p|$ второй последовательности. Для каждого значения p таких произведений должно быть $N-|p|$.

Таким образом, выражение для автокорреляционной функции при фиксированном и положительном значении p будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Psi_N(\tau', \Delta\omega) = & \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{k=N-p} \dot{F}_{k+p}[t - (k-1+p)T_{\pi}] \times \\ & \times \exp(j\omega t) \dot{F}_k^*[t - (k-1+p)T_{\pi} - \tau] \exp[-j(\omega + \\ & + \Delta\omega)(t - \tau')] dt = \operatorname{Re} \exp[j(\omega + \Delta\omega)\tau'] \sum_{k=1}^{k=N-p} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_{k+p}[t - \\ & - (k-1+p)T_{\pi}] \dot{F}_k^*[t - (k-1+p)T_{\pi} - \tau] \exp(-j\Delta\omega t) dt. \end{aligned}$$

Введем замену переменной под интегралом:

$$t - (k-1+p)T_{\pi} = \beta;$$

$$dt = d\beta.$$

Вынося из-под знака интеграла множитель, не зависящий от β , получим:

$$\begin{aligned} \Psi_N(\tau'; \Delta\omega) = & \operatorname{Re} \exp[j(\omega + \Delta\omega)\tau'] \times \\ & \times \sum_{k=1}^{k=N-p} \exp[-j(k-1+p)T_{\pi}\Delta\omega] \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_{k+p}(\beta) \times \\ & \times \dot{F}_k^*(\beta - \tau) \exp(-j\Delta\omega\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (73)$$

Интеграл представляет смешанную взаимокорреляционную функцию огибающих $k+p$ -го и k -го импульсов. Так как все импульсы пачки одинаковы, то этот интеграл может быть вынесен за знак суммы. Действительная часть интеграла есть модуль взаимокорреляционной функции (или автокорреляционной функции) одиночного импульса; обозначая его через $|\Psi(\tau, \Delta\omega)|$, выражение (73) можно переписать в виде

$$\Psi_N(\tau', \Delta\omega) = \operatorname{Re} \exp[j(\omega + \Delta\omega)\tau'] \times \\ \times \sum_{k=1}^{k=N-p} \exp[-j\Delta\omega(k-1+p)T_n] |\Psi(\tau, \Delta\omega)|.$$

Вычисление ведется для фиксированного значения p , поэтому из-под знака суммы может быть вынесен множитель

$$\exp[-j\Delta\omega(p-1)T_n].$$

Оставшаяся сумма

$$\sum_{k=1}^{k=N-p} \exp(-j\Delta\omega kT_n)$$

представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\exp(-j\Delta\omega T_n)$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k=N-p} \exp(-j\Delta\omega kT_n) = \exp(-j\Delta\omega T_n) \times \\ \times \frac{1 - \exp[-j\Delta\omega(N-p)T_n]}{1 - \exp(-j\Delta\omega T_n)}.$$

Таким образом,

$$\Psi_N(\tau', \Delta\omega) = \operatorname{Re} \exp[j(\omega + \Delta\omega)\tau'] \times \\ \times \exp[-j\Delta\omega pT_n] \frac{1 - \exp[-j\Delta\omega(N-p)T_n]}{1 - \exp(-j\Delta\omega T_n)} \times |\Psi(\tau, \Delta\omega)|.$$

Представляя

$$\exp[-j\Delta\omega(N-p)T_n] = \frac{\exp\left[-j\frac{\Delta\omega(N-p)T_n}{2}\right]}{\exp\left[j\frac{\Delta\omega(N-p)T_n}{2}\right]}$$

$$\exp(-j\Delta\omega T_n) = \frac{\exp\left(-j\frac{\Delta\omega T_n}{2}\right)}{\exp\left(j\frac{\Delta\omega T_n}{2}\right)}$$

и производя преобразования, получим:

$$\Psi_N(\tau'\Delta\omega) = \text{Re} \exp[j(\omega + \Delta\omega)\tau'] \times$$

$$\times \exp\left[-j\frac{\Delta\omega T_n}{2}(p+N-1)\right] \frac{\sin\frac{1}{2}[\Delta\omega T_n(N-p)]}{\sin\frac{1}{2}\Delta\omega T_n} \times$$

$$\times |\Psi(\tau, \Delta\omega)|.$$

Первый экспоненциальный множитель характеризует высокочастотное заполнение, а второй — его фазу. Так как нас интересует лишь огибающая функция $\Psi_N(\tau'\Delta\omega)$, то эти множители в дальнейшем могут быть опущены. Вводя нормирующий множитель $1/2NE_c$ и учитывая как положительные, так и отрицательные значения p (вводя $|p|$), окончательно получим модуль нормированной смешанной автокорреляционной функции пачки когерентных импульсов:

$$|\Psi_{N0}(\tau', \Delta\omega)| = \left| \frac{\sin\frac{\Delta\omega T_n(N-|p|)}{2}}{N \sin\frac{\Delta\omega T_n}{2}} \right| |\Psi_0(\tau, \Delta\omega)|. \quad (74)$$

Здесь $|\Psi_0(\tau, \Delta\omega)|$ представляет нормированное значение смешанной автокорреляционной функции одиночного импульса и играет как бы роль заполнения, а первый множитель является его огибающей.

Предполагая, что импульсы в пачке имеют гауссову форму и внутриимпульсную линейную частотную модуляцию, построим функцию (74) графически. Имеем (64):

$$|\Psi_0(\tau, \Delta\omega)| = \exp\left(-\frac{\gamma^2 \tau^2}{2}\right) \times \exp\left[-\frac{(2b\tau - \Delta\omega)^2}{8\gamma^2}\right].$$

Вначале положим $\Delta\omega=0$. Тогда

$$\Psi_0(\tau, 0) = \exp\left(-\frac{\gamma^2\tau^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{b^2\tau^2}{2\gamma^2}\right).$$

Множитель

$$\frac{\sin \frac{\Delta\omega T_{\pi}(N-|p|)}{2}}{N \sin \frac{\Delta\omega T_{\pi}}{2}}$$

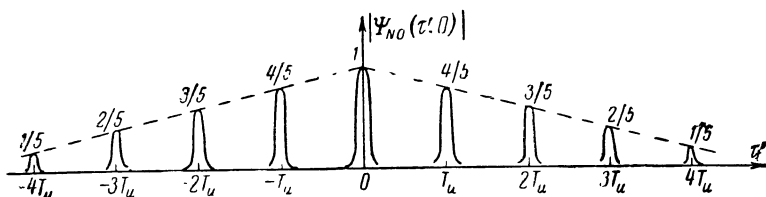


Рис. 37. Вид функции $|\Psi_{N0}(\tau', 0)|$.

при непосредственной подстановке $\Delta\omega=0$ дает неопределенный результат. Раскрывая неопределенность, получим:

$$\frac{d}{d(\Delta\omega)} \left[\sin \frac{\Delta\omega T_{\pi}(N-|p|)}{2} \right]_{\Delta\omega=0} = \frac{1}{2} T_{\pi} (N-|p|);$$

$$\frac{d}{d(\Delta\omega)} \left[\sin \frac{\Delta\omega T_{\pi}}{2} \right]_{\Delta\omega=0} = \frac{1}{2} T_{\pi}.$$

Таким образом,

$$|\Psi_{N0}(\tau', 0)| = \frac{N-|p|}{N} \exp\left(-\frac{\gamma^2\tau^2}{2}\right) \times \exp\left(-\frac{b^2\tau^2}{2\gamma^2}\right). \quad (75)$$

На рис. 37 показана зависимость $|\Psi_{N0}(\tau', 0)|$ от τ' для $N=5$.

Для $\tau'=0$

$$|\Psi_0(0, \Delta\omega)| = \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2}{8\gamma^2}\right).$$

На рис. 38 показана зависимость

$$|\Psi_{N0}(0, \Delta\omega)| = \left| \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta\omega T_{\text{н}} N - |p|}{\sin \frac{1}{2} \Delta\omega T_{\text{н}}} \right| \times \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2}{8\gamma^2}\right). \quad (76)$$

Если вычислить объем под поверхностью $|\Psi_{N0}(\tau', \Delta\omega)|$, то он окажется также равным 4π , как и в случае одиночного сигнала.

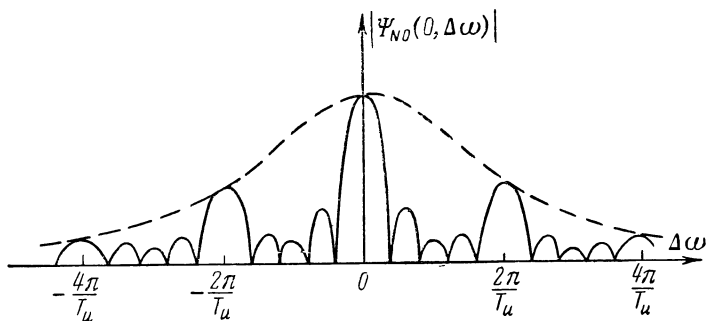


Рис. 38. Вид функции $|\Psi_{N0}(0, \Delta\omega)|$.

Вид функций (75) и (76) позволяет установить и вид площади неопределенности, получающейся в результате сечения функции (74) плоскостью, параллельной плоскости $(\tau', \Delta\omega)$. Вид этой площади показан на рис. 39.

Таким образом, смешанная автокорреляционная функция пачки когерентных импульсов имеет вид последовательности пиков, расположенных на плоскости $(\tau', \Delta\omega)$ в центре в начале координат расположен наибольший пик, а от него высота других пиков понижается. Каждый эллипс неопределенности одиночного сигнала распался на целый ряд эллипсов, имеющих значительно меньшую протяженность по оси частот (примерно в $NT_{\text{н}}/\tau_{\text{н}}$ раз). Такой вид площади неопределенности показывает, что имеет место одновременно хорошее разрешение как по времени, так и по частоте, и сигнал в виде пачки когерентных импульсов является весьма благоприятным для этой цели. Разрешающая способность определяется наибольшими размерами сечения центрального пика, которые равны: по оси времени

$$\delta(t)_{\text{пот}} = 1,3 \tau_{\text{н}}, \quad (41)$$

по оси частот

$$\delta(\omega)_{\text{пот}} = \frac{2\pi}{NT_{\text{ж}}} \quad (77)$$

Если провести такой же анализ для пачки некогерентных частотно-модулированных импульсов, то в этом случае мы никакого выигрыша при одновременном разрешении по времени и частоте, по сравнению с одиночным сигналом, не получим. Следует отметить, что при

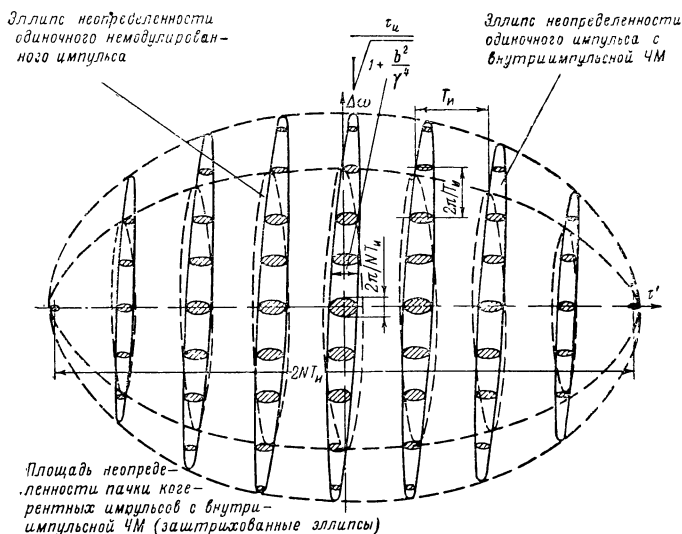


Рис. 39. Сечение смешанной автокорреляционной функции пачки когерентных импульсов.

когерентной пачке наряду с улучшением разрешающей способности в центре плоскости $(\tau', \Delta\omega)$ возникает неоднозначность, вызываемая наличием других пиков (максимумов) функции $|\Psi_{N0}(\tau', \Delta\omega)|$ наряду с центральным. Однозначное измерение времени и частоты возможно лишь в интервалах $T_{\text{ш}}$ и $2\pi/T_{\text{ш}}$ соответственно.

Рассмотрим пример: пусть входной сигнал представляет собой пачку из десяти когерентных импульсов, каждый из которых имеет те же параметры, что и в примере предыдущего параграфа ($\tau_{\text{ш}}=100$ мксек, $\Delta f_{\text{м}}=1,3$ МГц), и период следования $T_{\text{ш}}=500$ мксек. Какова потенциальная разрешающая способность такого сигнала при одновременном разрешении по времени и по частоте по срав-

нению с предыдущим случаем одиночного сигнала? Находим [формулы (41) и (77)]:

$$\delta(t)_{\text{пот}} = 1,3 \cdot 100 \cdot 100^{-6} = 130 \text{ мксек};$$

$$\delta(\omega)_{\text{пот}} = \frac{2\pi}{10 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} \approx 1,25 \cdot 10^3 \text{ рад/сек}$$

или $\delta(f)_{\text{пот}} = 200 \text{ гц}$.

Пределы однозначного измерения: времени прихода сигнала

$$\Delta T = 0 \div 500 \text{ мксек},$$

частоты

$$\Delta f = 0 \div \frac{1}{500 \cdot 10^{-6}} = 0 \div 2 \cdot 10^3 \text{ гц}.$$

Следовательно, при той же разрешающей способности по времени, что и у одиночного импульса, сигнал в виде пачки из десяти когерентных импульсов имеет значительно лучшую (примерно в 10^4 раз) разрешающую способность по частоте. Однако, не входя в подробности, следует указать, что использование когерентных сигналов возможно лишь в немногих случаях, когда может быть учтено доплеровское смещение частоты.

Мы рассмотрели лишь некоторые из возможных видов входных сигналов радиотехнических устройств. Следует предполагать, что в дальнейшем будут найдены другие типы сигналов, обеспечивающих лучшие возможности разрешения.

17. Статистическая теория разрешения двух сигналов

Выше был приведен сравнительный анализ различных типов входных сигналов радиотехнических устройств с точки зрения их потенциальной разрешающей способности и дана ее количественная оценка по ширине автокорреляционной функции, без учета мешающего шума. Такой подход приводит к удобным расчетным формулам, дающим хорошие практические результаты, но их применение ограничено случаями очень большого отношения энергий сигналов и шума. Степень перекрытия разрешаемых сигналов, наиболее сильно влияющая на надежность обнаружения, учитывается очень грубо: если перекрытие происходит на уровнях, равных или меньших 0,5 от максимума сигналов, то раз-

решение считается возможным, в противном случае — нет.

При таком методе оценка разрешающей способности представляет определенную и постоянную для данного типа сигнала величину, лишенную присущего ей вероятностного смысла. Например, для входного сигнала в виде импульса колокольной формы длительностью 1 мксек потенциальная разрешающая способность по времени будет равна $1,3\tau_n = 1,3$ мксек. На самом деле эта величина является случайной, и ее оценка может быть дана либо законом распределения или его числовыми характеристиками, либо семейством кривых, подобных рабочим характеристикам приемника обнаружения. Найденной по этим кривым величине разрешающей способности должны обязательно соответствовать вполне определенные значения отношения энергий сигналов и шума, вероятности правильного разрешения и вероятности ложной тревоги. Забегая вперед, приведем данные статистической оценки по таким кривым разрешающей способности для предыдущего примера: разрешающая способность по времени, равная 1,3 мксек, может быть получена при $R = 2E_c/E_{ш} = 16$ с вероятностью правильного разрешения $W_{п.о} = 0,3$ и вероятностью ложной тревоги $W_{л.т} = 10^{-4}$; если же взять $R = 25$, то такая же разрешающая способность может быть получена при той же величине $W_{л.т}$ уже при $W_{п.о} = 0,57$. При тех же значениях R можно разрешить и меньшие временные интервалы, однако надежность такого разрешения, характеризуемая значениями $W_{п.о}$ и $W_{л.т}$, будет хуже. Так, например, вдвое меньший интервал в 0,65 мксек при том же сигнале при $R = 25$ и $W_{л.т} = 10^{-4}$ может быть разрешен с вероятностью правильного разрешения, равной лишь 0,09.

Возникает вопрос, каким должен быть приемник, имеющий рабочие характеристики, позволяющие вести статистическую оценку разрешения, и как строятся эти характеристики. Определим сначала схему приемника, оптимального с точки зрения разрешения двух известных сигналов (термин «известный сигнал» имеет то же значение, что и в гл. 2). В этом случае задача оптимального приемника заключается в вычислении апостериорного распределения вероятностей наличия (отсутствия) двух сигналов [Л. 11]. Как было показано ранее [§ 5, ф-ла (9)], при бесконечно большом числе сигналов,

которые могут быть приняты, плотность апостериорной вероятности сигналов (апостериорное распределение), пропорциональна величине

$$L(u_c) = \exp \left\{ -\frac{1}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} [\dot{u}(t) - \dot{u}_c(t)]^2 dt \right\}, \quad (78)$$

где $\dot{u}_c(t)$ — известный опорный сигнал;

$\dot{u}(t) = \dot{u}_c(t) + \dot{u}_{\text{ш}}(t)$ — принимаемый сигнал в смеси с шумом;

$\dot{u}_{\text{ш}}(t)$ — шум, имеющий гауссово распределение и равномерный спектр со спектральной плотностью $E_{\text{ш}}$ в энергетической полосе Δf .

Максимум апостериорного распределения достигается при $L = L_{\text{макс}}$. Для этого необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} l = \int_0^{T_{\text{н}}} [\dot{u}(t) - \dot{u}_c(t)]^2 dt &= \int_0^{T_{\text{н}}} \dot{u}^2(t) dt - \\ &- 2 \int_0^{T_{\text{н}}} \dot{u}(t) \dot{u}_c(t) dt + \int_0^{T_{\text{н}}} \dot{u}_c^2(t) dt \end{aligned} \quad (79)$$

было минимальным. В случае наличия двух известных сигналов

$$\dot{u}_c(t) = Af(t) + Bg(t); \quad (80)$$

$$\dot{u}(t) = Af(t) + Bg(t) + \dot{u}_{\text{ш}}(t), \quad (81)$$

где $Af(t)$ — сигнал с амплитудой A , который будем называть сигналом A ;

$Bg(t)$ — сигнал с амплитудой B , который будем называть сигналом B ;

$f(t)$ и $g(t)$ — полностью известные комплексные функции времени; в частности, может быть, что $g(t) = f(t - \tau)$, т. е. отличие заключается лишь в сдвиге по времени;

A и B — постоянные амплитуды, которые могут быть неизвестными.

Подставляя в (79) значение $\dot{u}_c(t)$ (80), получим:

$$l = \int_0^{T_H} \dot{u}^2(t) dt - 2 \int_0^{T_H} \dot{u}(t) A f(t) dt - 2 \int_0^{T_H} \dot{u}(t) B g(t) dt + \\ + \int_0^{T_H} A^2 f^2(t) dt + 2AB \int_0^{T_H} f(t) g(t) dt + \int_0^{T_H} B^2 g^2(t) dt.$$

Нормируем сигналы по энергии, т. е. положим, что

$$\int_0^{T_H} f^2(t) dt = \int_0^{T_H} g^2(t) dt = 1. \quad (82)$$

Введем обозначение

$$\int_0^{T_H} f(t) g(t) dt = \Psi_{AB}, \quad (83)$$

где Ψ_{AB} — нормированная комплексная взаимокорреляционная функция сигналов по параметру разрешения.

Учитывая (82) и (83), получим:

$$l = \int_0^{T_H} \dot{u}^2(t) dt - 2A \int_0^{T_H} \dot{u}(t) f(t) dt - \\ - 2B \int_0^{T_H} \dot{u}(t) g(t) dt + A^2 + 2AB\Psi_{AB} + B^2. \quad (84)$$

Найдем значения сигналов A и B , которые минимизируют l ; для этого надо решить уравнения

$$\frac{\partial l}{\partial A} = A^* - 2 \int_0^{T_H} \dot{u}(t) f(t) dt + 2\Psi_{AB} B^* = 0; \quad (85)$$

$$\frac{\partial l}{\partial B} = B^* - 2 \int_0^{T_H} \dot{u}(t) g(t) dt + 2\Psi_{AB} A^* = 0. \quad (86)$$

Отсюда находим значения A^* и B^* , приводящие к $l = l_{\text{мин}}^*$,

$$A^* = \frac{1}{1 - \dot{\Psi}_{AB}^2} \int_0^{T_H} [f(t) - \dot{\Psi}_{AB} g(t)] \dot{u}(t) dt; \quad (87)$$

$$B^* = \frac{1}{1 - \dot{\Psi}_{AB}^2} \int_0^{T_H} [g(t) - \dot{\Psi}_{AB} f(t)] \dot{u}(t) dt. \quad (88)$$

Выражения (87) и (88) позволяют определить схему достаточного приемника. Такой приемник должен состоять в данном случае из двух каналов — A и B

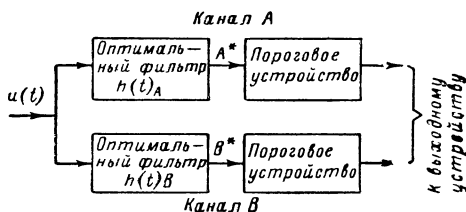


Рис. 40. Структурная схема достаточного приемника для разрешения двух известных сигналов.

(рис. 40), причем каждый из каналов должен иметь фильтр с импульсной переходной характеристикой:

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_A(t) &= \frac{f(t_0 - t) - \dot{\Psi}_{AB} g(t_0 - t)}{1 - \dot{\Psi}_{AB}^2} \\ \dot{h}_B(t) &= \frac{g(t_0 - t) - \dot{\Psi}_{AB} f(t_0 - t)}{1 - \dot{\Psi}_{AB}^2} \end{aligned} \right| \text{при } 0 \leq t \leq t_0 \quad (89)$$

(для канала B),

где t_0 — момент наблюдения выходного сигнала фильтра;

$$h_A(t) = h_B(t) = 0 \quad \text{при } 0 > t > t_0. \quad (90)$$

Сравнивая (89) с аналогичным выражением для

* В том, что значения A^* и B^* соответствуют минимуму, а не максимуму, можно убедиться, проводя исследования функции $l = f(A, B)$ на максимум и минимум.

оптимального фильтра, предназначенного для обнаружения только одного сигнала (см. § 5), видим, что фильтр для разделения двух сигналов имеет более сложную импульсную переходную характеристику (а следовательно, и частотную характеристику, являющуюся преобразованием Фурье от переходной функции). В характеристике этого фильтра учитываются и вид второго сигнала и значение функции корреляции сигналов, определяемое их сдвигом. Построить такой фильтр еще сложнее, чем оптимальный для одного сигнала. При отсутствии корреляции (89) совпадает с импульсной переходной характеристикой оптимального фильтра для одиночного сигнала.

В процессе разрешения могут встретиться четыре случая:

- 1) $\dot{u}(t) = Af(t) + Bg(t) + \dot{u}_{\text{ш}}(t)$ — есть оба сигнала + шум;
- 2) $\dot{u}(t) = Af(t) + \dot{u}_{\text{ш}}(t)$ — есть сигнал A + шум;
- 3) $\dot{u}(t) = Bg(t) + \dot{u}_{\text{ш}}(t)$ — есть сигнал B + шум;
- 4) $\dot{u}(t) = \dot{u}_{\text{ш}}(t)$ — есть только шум.

На выходе фильтров A и B при отсутствии шумов в первом случае получим оценку сигналов $A^* = A$, $B^* = B$; во втором случае $A^* = A$, $B^* = 0$; в третьем случае $A^* = 0$, $B^* = B$; в четвертом случае $A^* = 0$, $B^* = 0$. В этом случае можно убедиться, подставив соответствующие значения $\dot{u}(t)$ в выражения (87) и (88).

При наличии шумов оценки будут случайными и наиболее полно характеризуются вероятностями правильного обнаружения $W_{\text{п.о.а}}$, $W_{\text{п.о.в}}$ и ложной тревоги $W_{\text{л.т.а}}$, $W_{\text{л.т.в}}$. Для нахождения этих вероятностей следуют найти распределения $\omega_0(A^*)$ — плотность вероятности A^* при наличии только шума; $\omega_1(A^*)$ — плотность вероятности A^* при наличии сигнала A и шума, и соответствующие распределения для сигнала B .

Не производя подробных выкладок, приведем окончательные выражения плотностей вероятностей:

$$\omega_0(A^*) = \sqrt{\frac{1 - \Psi_{AB}^2}{\pi E_{\text{ш}}}} \exp \left[-\frac{(A^*)^2}{\frac{E_{\text{ш}}}{1 - \Psi_{AB}^2}} \right]; \quad (91)$$

$$\omega_1(A^*) = \sqrt{\frac{1 - \Psi_{AB}^2}{\pi E_{\text{ш}}}} \exp \left[-\frac{(A^* - A)^2}{\frac{E_{\text{ш}}}{1 - \Psi_{AB}^2}} \right]. \quad (92)$$

Выражения для $w_0(B^*)$ и $w_1(B^*)$ имеют аналогичную структуру. Зависимости (91) и (92) показаны на рис. 41 для двух разных значений Ψ_{AB} . Величины A^* и B^* имеют нормальные законы распределения с дисперсией $E_{\text{ш}}/2(1 -$

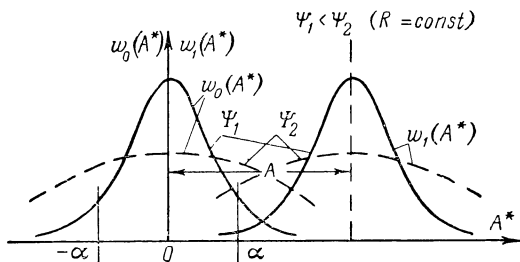


Рис. 41. Распределения плотности вероятностей $w_0(A^*)$ и $w_1(A^*)$ для известного сигнала.

— Ψ_{AB}^2), причем при наличии только шума средние значения A^* и B^* равны нулю, а при наличии сигнала и шума они равны амплитудам сигналов A и B .

Вероятность ложной тревоги для сигнала A может быть найдена как вероятность превышения порогов $-\alpha$ и $+\alpha$ абсолютной величиной выходного напряжения A^* :

$$\begin{aligned} W_{\text{л.т.}A} &= W[|A^*| > |\alpha|, A=0] = 2 \int_{\alpha}^{\infty} w_0(A^*) dA^* = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} w_0(A^*) dA^* - 2 \int_{-\infty}^{\alpha} w_0(A^*) dA^* = \\ &= 2[1 - F(x_0)], \end{aligned} \quad (93)$$

где $F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} w_0(A^*) dA^*$ — табулированный интеграл вероятностей [Л. 9];

$$F(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-t^2/2} dt; \quad x_0 = \frac{\alpha \sqrt{2(1 - \Psi_{AB}^2)}}{\sqrt{E_{\text{ш}}}}.$$

Вероятность правильного обнаружения равна:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{п.о.}A} &= W[|A^*| > |\alpha|; A \neq 0] = \int_{\alpha}^{\infty} w_1(A^*) dA^* + \\
 &+ \int_{-\infty}^{-\alpha} w_1(A^*) dA^* = \int_{-\infty}^{-(A+\alpha)} w_0(A^*) dA^* + \\
 &+ \int_{-(A-\alpha)}^{\infty} w_0(A^*) dA^* = 1 + \int_{-\infty}^{-(A+\alpha)} w_0(A^*) dA^* - \\
 &- \int_{-\infty}^{-(A-\alpha)} w_0(A^*) dA^* = 1 + F(y_1) - F(y_2),
 \end{aligned}$$

где

$$y_1 = -(A + \alpha) \sqrt{\frac{2(1 - \Psi_{AB}^2)}{E_{\text{ш}}}},$$

$$y_2 = -(A - \alpha) \sqrt{\frac{2(1 - \Psi_{AB}^2)}{E_{\text{ш}}}}.$$

Задаваясь нужным значением $W_{\text{л.т}}$ и фиксируя значения $E_{\text{ш}}$ и A , можно построить график зависимости

$$W_{\text{п.о.}} = \varphi(\Psi_{AB}) \text{ при } W_{\text{л.т}} = \text{const.}$$

Такие кривые приведены на рис. 42. Они могут быть названы характеристиками разрешения.

Для пользования кривыми необходимо знать значение автокорреляционной функции сигнала (одиночного — Ψ_{AB} или пачки Ψ_{ABN}) для заданного сдвига по времени τ или по частоте $\Delta\omega$.

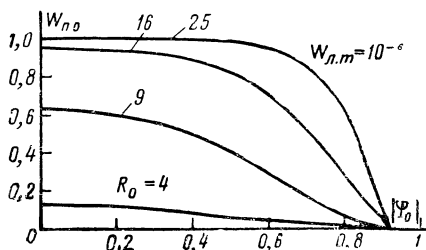


Рис. 42. Характеристики разрешения для двух известных сигналов.

Эти же кривые могут быть построены непосредственно в зависимости от τ и $\Delta\omega$. Вид кривых показывает, что надежность разрешения растет с уменьшением относительной энергии шума и уменьшением значения функции автокорреляции.

Этот же вывод можно сделать и из анализа распределений (91) и (92), показанных на рис. 41. Чем меньше величина

$$E_{\text{ш}}/(1 - \Psi_{AB}^2) \quad (94)$$

и чем больше энергия сигнала E_c (пропорциональная A^2), тем уже распределения $\omega_0(A^*)$ и $\omega_1(A^*)$ и тем лучше они разделяются. Это означает, что при уменьшении $E_{\text{ш}}/(1 - \Psi_{AB}^2)$ и увеличении энергии сигнала при одном и том же значении порога обнаружения α вероятность правильного обнаружения будет расти, а вероятность ложной тревоги падать. Величина

$$\frac{2E_c(1 - \Psi_{AB}^2)}{E_{\text{ш}}} = R(1 - \Psi_{AB}^2) \quad (95)$$

может быть названа параметром разрешения.

Была рассмотрена характеристика разрешения для канала A . К таким же результатам приведет и исследование обнаружения сигнала B . Следовательно, процесс разрешения заключается в наблюдении выходов каналов A и B . При наличии сигнала только в канале A принимается решение о том, что имеется одна цель A , наличие сигнала только в канале B указывает на то, что имеется только цель B , наличие сигнала одновременно в обоих каналах свидетельствует о присутствии одновременно обеих целей. Величина установленного порога будет определять соответствующие вероятности ложной тревоги, а вероятности правильного обнаружения при заданном отношении энергий сигнала и шума будут определяться степенью перекрытия сигналов (величиной функции автокорреляции Ψ_{AB}), на которое рассчитаны частотные характеристики фильтров. В случае, если приемник должен разрешать не два сигнала, а более, необходим анализ апостериорного распределения для всего этого количества сигналов.

Рассмотрим теперь разрешение двух сигналов, имеющих случайную разность фаз и случайные и независи-

мые амплитуды. В этом случае входное воздействие может быть записано в виде

$$u(t) = A \operatorname{Re} \dot{F}(t) \exp(j\omega_0 t + j\varphi_1) + \\ + B \operatorname{Re} \dot{G}(t) \exp(j\omega_0 t + j\varphi_2) + \dot{u}_{\text{ш}}(t). \quad (96)$$

Выражения для оценки амплитуд сигналов A и B находятся аналогичным методом с учетом того, что фазы и амплитуды сигналов случайны (см. § 8). Окончательные выражения имеют вид:

$$A^* = (1 - |\dot{\Psi}_{AB}|^2)^{-1} \left| \int_0^{T_H} [\dot{F}^*(t) - \dot{\Psi}_{AB}^* G^*(t)] \dot{Y}(t) dt \right|; \quad (97)$$

$$B^* = (1 - |\dot{\Psi}_{AB}|^2)^{-1} \left| \int_0^{T_H} [G^*(t) - \dot{\Psi}_{AB} \dot{F}^*(t)] \dot{Y}(t) dt \right|, \quad (98)$$

где $Y(t)$ есть комплексная огибающая входного воздействия,

$$|\dot{\Psi}_{AB}| = \left| \int_0^{T_H} \dot{F}(t) \dot{G}^*(t) dt \right| \quad (99)$$

— модуль комплексной нормированной взаимокорреляционной функции огибающих сигналов A и B , а сигналы нормированы по энергии

$$\int_0^{T_H} |\dot{F}(t)|^2 dt = \int_0^{T_H} |\dot{G}(t)|^2 dt = 1. \quad (100)$$

Оценки A^* и B^* могут быть получены наблюдателем на выходах соответствующих каналов достаточного приемника, изображенного на рис. 43.

Каждый из каналов такого приемника состоит из фильтра, амплитудного детектора и порогового устройства.

Фильтры должны быть соответственно согласованы с сигналами, имеющими огибающие:

$$[\dot{F}(t) - \dot{\Psi}_{AB} \dot{G}(t)] / (1 - |\dot{\Psi}_{AB}|^2); \quad (101)$$

$$[\dot{G}(t) - \dot{\Psi}_{AB}^* \dot{F}(t)] / (1 - |\dot{\Psi}_{AB}|^2). \quad (102)$$

Переходные импульсные характеристики фильтров соответственно будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{h}_A(t) &= \frac{e^{j\omega_0 t}}{1 - |\Psi_{AB}|^2} [\dot{F}(t_0 - t) - \dot{\Psi}_{AB} \dot{G}(t_0 - t)]; \\ \dot{h}_B(t) &= \frac{e^{j\omega_0 t}}{1 - |\Psi_{AB}|^2} [\dot{G}(t_0 - t) - \dot{\Psi}_{AB}^* \dot{F}(t_0 - t)] \end{aligned} \quad (103)$$

при $0 \leq t \leq t_0$;

$$\dot{h}_A(t) = \dot{h}_B(t) = 0 \quad \text{при } 0 > t > t_0. \quad (104)$$

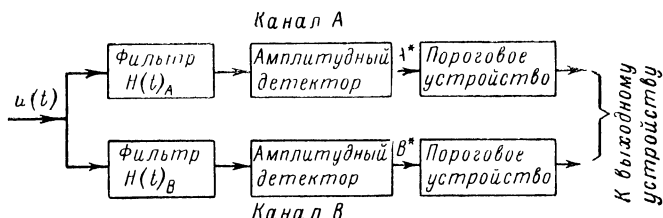


Рис. 43. Структурная схема достаточного приемника для разрешения двух сигналов с неизвестной фазой.

Вероятность ложной тревоги A^* (или B^*), вычисленная по распределению $\omega_0(A^*)$ [или $\omega_0(B)^*$], оказывается равной

$$W_{\text{л.т}} = \exp \left[-\alpha^2 / \frac{2E_{\text{ш}}}{1 - |\Psi_{AB}|^2} \right], \quad (105)$$

а вероятность правильного обнаружения

$$\begin{aligned} W_{\text{п.о}} &= \int_0^\infty \frac{A^*}{E_{\text{ш}}} (1 - |\Psi_{AB}|^2) \times \\ &\quad \alpha / \sqrt{\frac{E_{\text{ш}}}{1 - |\Psi_{AB}|^2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \left[\frac{A^{*2} + A^2}{2E_{\text{ш}}} (1 - |\Psi_{AB}|^2) \right] \right\} \times \\ &\quad \times I_0 \left[\frac{A^*}{\sqrt{E_{\text{ш}}}} \sqrt{1 - |\Psi_{AB}|^2}; \frac{A}{\sqrt{E_{\text{ш}}}} \sqrt{1 - |\Psi_{AB}|^2} \right]. \end{aligned} \quad (106)$$

Последнее выражение табулировано [Л. 9]. На рис. 44 приведены графики $W_{\text{п.о}} = \Phi(\Psi_{AB})$ при $W_{\text{л.т}} = \text{const}$ и $R = \text{var}$.

Сравнение кривых рис. 42 и 44 показывает, что разрешение известного сигнала происходит при прочих равных условиях надежнее, чем сигнала с неизвестной фазой, что соответствует полученным ранее выводам при рассмотрении обнаружения одиночного сигнала. Кроме того, следует помнить, что по оси абсцисс на рис. 42 отложено значение быстро осциллирующей функции вза-

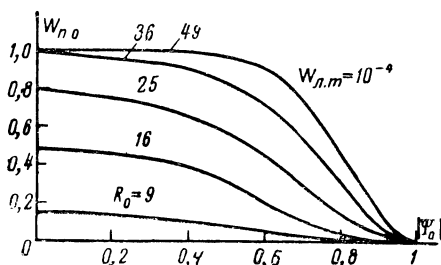


Рис. 44. Характеристики разрешения для двух сигналов с неизвестной фазой.

имокорреляции, меняющейся от нуля до максимума за $1/4$ периода высокочастотных колебаний, в то время как на рис. 44 отложено значение взаимокорреляционной функции огибающей, спадающей от максимума до нуля за время половины длительности импульса (если говорить о разрешении по времени). Поэтому в принципе, если бы было возможно реализовать знание фазы высокочастотного заполнения сигнала, можно было бы получить весьма высокую степень разрешения, определяемую например, для времени величиной в $1/4$ периода высокочастотных колебаний. Однако высокочастотное заполнение на практике обычно не используется из-за почти непреодолимых трудностей, и величина разрешения определяется шириной взаимокорреляционной функции огибающих.

Применим результаты изложенной теории для решения конкретной задачи: зададимся определенным видом разрешаемых сигналов и вычислим частотные характеристики фильтров, оптимальных с точки зрения разрешения при заданном временном сдвиге между сигналами.

Комплексная частотная характеристика фильтра может быть определена по его импульсной переходной функции преобразованием Фурье:

$$k(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (107)$$

Выберем сигналы в виде радиоимпульсов прямоугольной формы с неизвестной фазой и постоянной амплитудой. Сигнал A при этом будет иметь вид:

$$f(t)_n = \dot{F}(t)_n \exp(j\omega_0 t + j\varphi_1), \quad (108)$$

где $\dot{F}(t)_n = A$,

$$A = 1 \quad \text{при} \quad -\frac{\tau_n}{2} \leq t \leq \frac{\tau_n}{2};$$

$$A = 0 \quad \text{при} \quad -\frac{\tau_n}{2} > t > \frac{\tau_n}{2},$$

а индекс «н» означает, что функция не нормирована по энергии.

Сигнал B принимаем одинаковым с сигналом A , но сдвинутым на время τ :

$$\begin{aligned} g(t)_n &= \dot{G}(t)_n \exp(j\omega_0 t + j\varphi_2) = \\ &= \dot{F}(t - \tau)_n \exp[j\omega_0(t - \tau) + j\varphi_2], \end{aligned} \quad (109)$$

где $\dot{G}(t)_n = \dot{F}(t - \tau)_n = A$;

$$A = 1 \quad \text{при} \quad -\frac{\tau_n}{2} + \tau \leq t \leq \frac{\tau_n}{2} + \tau;$$

$$A = 0 \quad \text{при} \quad -\frac{\tau_n}{2} + \tau > t > \frac{\tau_n}{2} + \tau.$$

В выражение (103) для $\dot{h}(t)$ оптимального фильтра входят нормированные значения $\dot{F}(t)$ и $\dot{G}(t)$, поэтому нормируем сигналы (108) и (109) по энергии. Нормирующий множитель может быть найден из соотношений $\dot{f}(t) = k\dot{f}(t)_n$ и $g(t) = kg(t)_n$.

Потребуем, чтобы

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \dot{f}^2(t)_n dt = 1.$$

Отсюда

$$k = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)_{\text{н}} dt}},$$

но

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)_{\text{н}} dt = A^2 \int_{-\tau_{\text{н}}/2}^{\tau_{\text{н}}/2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_1) dt = \frac{A^2 \tau_{\text{н}}}{2}$$

и

$$k = \sqrt{\frac{2}{\tau_{\text{н}}}} \frac{1}{A}. \quad (110)$$

Нормированные амплитуды сигналов имеют вид:

$$F^*(t_0 - t) = kA;$$

$$A = 1 \text{ при } -\frac{\tau_{\text{н}}}{2} + t_0 \leq t \leq \frac{\tau_{\text{н}}}{2} + t_0;$$

$$A = 0 \text{ при } -\frac{\tau_{\text{н}}}{2} + t_0 > t > \frac{\tau_{\text{н}}}{2} + t_0.$$

и

$$G^*(t_0 - t) = kA;$$

$$A = 1 \text{ при } -\frac{\tau_{\text{н}}}{2} + t_0 + \tau \leq t \leq \frac{\tau_{\text{н}}}{2} + t_0 + \tau;$$

$$A = 0 \text{ при } -\frac{\tau_{\text{н}}}{2} + t_0 + \tau > t > \frac{\tau_{\text{н}}}{2} + t_0 + \tau.$$

Модуль функции корреляции имеет для рассматриваемого сигнала действительное значение, равное:

$$|\Psi_{AB}| = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_{\text{н}}}.$$

Подставляя значения $F(t_0 - t)$, $G(t_0 - t)$ и $|\Psi_{AB}|$ в (103), а полученный результат — в (107), найдем комплексную частотную характеристику фильтра канала A :

$$k(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{kA\tau_{\text{н}}}{1 - |\Psi_{AB}|^2} \exp[-j(\omega - \omega_0)t_0] \times \\ \times \{1 - |\Psi_{AB}| \exp[-j(\omega - \omega_0)\tau]\} \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau_{\text{н}}}{2}}{(\omega - \omega_0) \frac{\tau_{\text{н}}}{2}}. \quad (111)$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра, равная модулю (111), имеет вид:

$$k(\omega)_A = \frac{1}{2\pi} \frac{kA\tau_{\pi}}{1 - |\Psi_{AB}|^2} \sqrt{1 - 2|\Psi_{AB}| \cos(\omega - \omega_0)\tau + |\Psi_{AB}|^2} \times \\ \times \left| \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau_{\pi}}{2}}{(\omega - \omega_0) \frac{\tau_{\pi}}{2}} \right|. \quad (112)$$

Фазочастотная характеристика фильтра, являющаяся аргументом (111), имеет вид:

$$\varphi(\omega)_A = \text{arctg} \left[- \frac{\sin(\omega - \omega_0)t_0 - |\Psi_{AB}| \sin(\omega - \omega_0)(t_0 - \tau)}{\cos(\omega - \omega_0)t_0 - |\Psi_{AB}| \cos(\omega - \omega_0)(t_0 - \tau)} \right]. \quad (113)$$

Если проделать аналогичные выкладки для фильтра канала B , получим соответственно:

$$k(\omega)_A = k(\omega)_B; \\ \varphi(\omega)_B = \text{arctg} \left[- \frac{\sin(\omega - \omega_0)t_0 - \dots \rightarrow}{\cos(\omega - \omega_0)t_0 - \dots \rightarrow} \right. \\ \left. \leftarrow \dots - \frac{\frac{1}{|\Psi_{AB}|} \sin(\omega - \omega_0)(t_0 + \tau)}{-\frac{1}{\Psi_{AB}} \cos(\omega - \omega_0)(t_0 + \tau)} \right]. \quad (114)$$

Следовательно, в данном случае разрешения двух одинаковых сигналов фильтры каналов A и B отличаются только лишь наклоном фазо-частотных характеристик.

На рис. 45,а показаны амплитудно-частотные характеристики (112) оптимальных фильтров для сигналов, имеющих различные сдвиги по времени, а на рис. 45,б — соответствующие им фазо-частотные характеристики (113) (условно показаны лишь правые ветви характеристик, симметричных относительно точки $\omega - \omega_0 = 0$).

Видно, что характеристики в сильной степени зависят от сдвига сигналов (от значения взаимокорреляционной

функции). При сдвиге, близком к τ_u , характеристики практически совпадают с характеристиками оптимального фильтра для одиночного сигнала и сильно отличаются от них при $\tau \ll \tau_u$. Вид характеристик еще раз под-

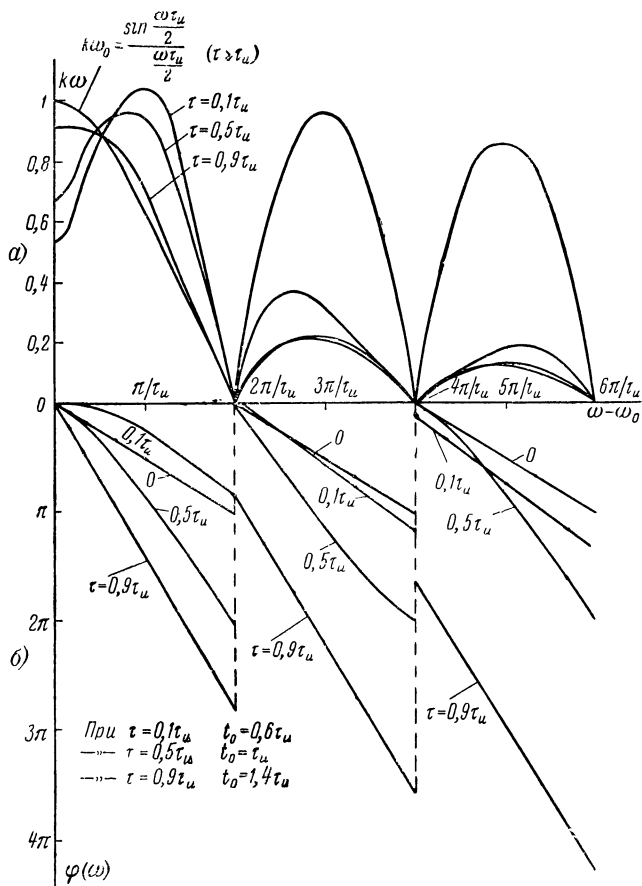


Рис. 45. Частотные характеристики фильтров, оптимальных с точки зрения разрешения двух сигналов с неизвестной фазой.

a — амплитудные; *б* — фазовые.

тверждает ранее сделанный вывод о том, что для оптимального разрешения на всем интервале корреляции сигналов необходимо иметь бесконечно большое количество фильтров. Ясно, что практически реализовать это

нельзя, но можно приблизиться к оптимальному решению путем применения конечного числа фильтров, рассчитанных на рациональным образом выбранные значения сдвигов. Кроме того, могут встретиться случаи, когда известен сдвиг сигналов по параметру разрешения и возможна реализация фильтра с характеристиками, оптимальными для разрешения. Однако в любом варианте схема приемника получается сложной, да и количество разрешаемых сигналов в большинстве случаев не ограничивается двумя, что приводит к дальнейшему увеличению числа каналов. Поэтому приемники, оптимальные с точки зрения разрешения, на практике не используются, а применяются схемы, близкие к оптимальным для обнаружения одиночного сигнала. Оценка потенциальной разрешающей способности по результатам этого параграфа (характеристики разрешения рис. 42, 44) для таких приемников неприменима, и следует использовать метод приближенной оценки по ширине автокорреляционной функции, мирясь с его ограничениями. Тем не менее, несмотря на отсутствие в настоящее время практических приложений изложенной статистической теории разрешения, ценность ее несомненна, так как она позволяет установить предельные возможности и схему приемника, оптимального с точки зрения разрешения.

18. Реальная разрешающая способность

Выше шла речь о потенциальной разрешающей способности. При строгой оценке ее величина, как было показано, зависит лишь от параметра разрешения [см. (95)].

В реальных условиях разрешающая способность всегда будет хуже ее потенциального значения из-за уменьшения отношения энергий сигналов и шума и из-за искажения формы сигналов в различных элементах тракта прохождения сигналов от антенны до получателя информации. Причинами ухудшения могут быть, например, несогласованность частотных характеристик УПЧ и видеоусилителя приемника с характеристиками сигналов, конечные размеры пятна электроннолучевой трубки в индикаторном устройстве и т. д. Учет этих факторов может быть произведен аналогично тому, как это описано в гл. 2.

В общем случае величина разрешающей способности по какому-либо параметру α может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\delta(\alpha) &= \delta(\alpha)_{\text{пот}} + \sum \delta(\alpha)_i = \\ &= \delta(\alpha)_{\text{пот}} \left(1 + \frac{\sum \delta(\alpha)_i}{\delta(\alpha)_{\text{пот}}} \right) = \gamma_{\alpha} \delta(\alpha)_{\text{пот}},\end{aligned}\quad (115)$$

где $\delta(\alpha)_{\text{пот}}$ — величина потенциальной разрешающей способности;

$\delta(\alpha)_i$ — дополнительное ухудшение разрешающей способности в i -м узле устройства;

γ — коэффициент ухудшения разрешающей способности по параметру α ,

$$\gamma_{\alpha} = 1 + \frac{\sum \delta(\alpha)_i}{\delta(\alpha)_{\text{пот}}} \quad (116)$$

Часто наибольшие ухудшения вносит выходное устройство аппаратуры — стрелочный прибор, электроннолучевая трубка и т. д. В таких случаях можно при-
нять, что

$$\gamma_{\alpha} \approx 1 + \frac{\delta(\alpha)_{\text{в.у}}}{\delta(\alpha)_{\text{пот}}}, \quad (117)$$

где $\delta(\alpha)_{\text{в.у}}$ — разрешающая способность выходного устройства.

Подсчитаем в качестве примера коэффициент ухудшения разрешающей способности по времени в приемном устройстве с электроннолучевым индикатором. Сигналы в виде немодулированных гауссовых импульсов с $\tau_{\text{и}} = 1$ мксек наблюдаются на временной развертке с длительностью $T_{\text{р}} = 500$ мксек и длиной шкалы $L_{\text{шк}} = 100$ мм, диаметр пятна трубки $d_{\text{п}} = 0,5$ мм.

Величина потенциальной разрешающей способности равна (41):

$$\delta(t)_{\text{пот}} = 1,3 \cdot 10^{-6} = 1,3 \text{ мксек.}$$

Конечные размеры пятна увеличивают протяженность сигнала по шкале времени на величину диаметра пятна. Цена пятна в микросекундах и есть разрешающая способность индикаторного выходного устройства,

$$\delta(t)_{\text{в.у}} = \frac{T_{\text{р}}}{L_{\text{шк}}} d_{\text{п}} = \frac{500}{100} 0,5 = 2,5 \text{ м/сек.}$$

Подставляя полученные результаты в (115), будем иметь:

$$\delta(t) = 1,3 + 2,5 = 3,8 \text{ мксек}$$

и

$$\gamma_t = 1 + \frac{2,5}{1,3} \approx 3.$$

Аналогично может быть определена реальная разрешающая способность и по другим параметрам, если известна конкретная схема приемного тракта.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

19. Основные сведения из теории ошибок.

Задача измерения параметров сигналов

Широкий класс радиотехнических устройств предназначен для измерения значений параметров сигналов. Чаще всего измеряются время запаздывания сигналов, излученных (или переизлученных) объектом, направление их прихода и несущая частота. Измерение этих параметров позволяет определить соответственно дальность, пеленг и скорость движения объекта. Такие задачи решает радиолокационная и радионавигационная аппаратура. При разведке радиосредств противника и создании им радиопомех необходимо измерять также и другие параметры — длительность сигналов, характеристики закона модуляции частоты, частоту повторения, частоту сканирования антенны и некоторые другие. Возможны и иные причины и случаи измерения параметров.

Важнейшим показателем радиотехнической аппаратуры как измерительного устройства является точность измерения, характеризующая ошибкой измерения. Ошибка в измерении неизбежна, так как процесс измерения всегда сопровождается помехами случайного характера. Из-за случайного вида помех и сама ошибка по своей величине и знаку является случайной величиной. Правда, если наряду со случайными помехами действуют постоянные по своему значению мешающие факторы, возникает систематическая слагающая общей ошибки, но такие факторы в принципе могут быть учтены и в дальнейшем мы будем считать систематическую ошибку скомпенсированной. Случайные ошибки обычно имеют нормальный закон распределения. Для оценки

точности используют чаще всего среднеквадратическую ошибку, иногда же применяют вероятную (срединную) ошибку или так называемые квазимаксимальные ошибки с указанием соответствующей им вероятности (0,8; 0,9; 0,95; 0,99). В дальнейшем мы будем обозначать ошибку измерения какого-либо параметра α через $\Delta(\alpha)$, указывая в индексе соответствующую ей вероятность; среднеквадратическая ошибка имеет свое особое распространное обозначение $\sigma(\alpha)$. Для нормального закона распределения справедливо следующее соотношение между величинами ошибок различной категории:

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &\approx 1,5 \Delta(\alpha)_{0,5} \approx 0,8 \Delta(\alpha)_{0,8} \approx \\ &\approx 0,6 \Delta(\alpha)_{0,9} \approx 0,4 \Delta(\alpha)_{0,99}.\end{aligned}\quad (118)$$

При оценке точности работы уже существующего радиоприбора наиболее надежным является экспериментальный метод. При этом методе производятся многократные измерения параметра сигнала, истинное значение которого известно заранее с высокой точностью. При каждом измерении вычисляется ошибка:

$$\Delta(\alpha)_i = \alpha_0 - \alpha_i,$$

где α_0 — истинное значение параметра;
 α_i — его значение при i -м измерении.

Среднеквадратическая ошибка при этом может быть вычислена по формуле

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [\Delta(\alpha)_i]^2}{n-1}}. \quad (119)$$

где n — общее количество измерений.

Систематическая ошибка определяется из соотношения

$$\Delta(\alpha)_{\text{сист}} = \alpha_0 - \alpha_{\text{ср}}, \quad (120)$$

где $\alpha_{\text{ср}}$ — среднее значение параметра, вычисленное по результатам измерений,

$$\alpha_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n}. \quad (121)$$

При проектировании нового радиоустройства по заданным требованиям к точности приходится применять расчетный метод, основанный на расчете отдельных составляющих общей ошибки, вызываемых различными факторами. Важнейшими факторами, влияющими на величину общей ошибки, являются: отношение энергий принимаемого сигнала и шумов, форма сигнала, степень согласования характеристик приемного тракта с характеристиками сигнала, степень совершенства выполнения отдельных узлов (в особенности отсчетных устройств), метод отсчета и допускаемое время измерения, отклонение траекторий распространения радиоволн от расчетных и др.

Составляющая общей ошибки, определяемая отношением энергий сигнал/шум и формой сигнала, называется потенциальной ошибкой. Она характеризует предельно достижимую точность работы устройства при прочих идеальных условиях. Анализ потенциальных ошибок весьма важен, так как позволяет выбрать оптимальную форму сигнала в каждом конкретном случае измерений, оценить удельный вес ошибок, вызванных другими факторами, и определить рациональные пути уменьшения общей ошибки.

20. Потенциальная точность измерения одного параметра сигнала

При измерении параметра следует найти его абсолютное значение и в некоторых случаях знак (например, при измерении частоты Допплера). В каждом конкретном измерении абсолютное значение будет измеряться со случайной ошибкой, т. е. будет случайной величиной. Для характеристики точности измерений необходимо найти дисперсию этой величины, или среднеквадратическое значение ошибки. Измерение ведется по выходному эффекту приемника. В этой главе, как и в предыдущей, будем считать: 1) что приемник является достаточным (оптимальным фильтром для выбранного сигнала); 2) что мешающий шум имеет нормальное распределение со средним значением, равным нулю, и равномерной спектральной плотностью в полосе Δf . Возникает вопрос, каким должен быть сам метод измерения. Очевидно, наилучшим будет метод, дающий оценку α^* параметра α , которая при усреднении по множеству измере-

ний совпадает с истинным значением параметра α_0 , т. е.

$$\bar{\alpha}_0^* - \alpha_0 = 0. \quad (122)$$

Такая оценка называется несмещенной.

Кроме того, выбранный метод должен давать наименьшую из возможных дисперсию оценки. Если соблюдено это условие, то такая оценка называется эффективной. Условием несмещенности и эффективности при большом значении $R = 2E_c/E_{\text{ш}} \gg 1$ удовлетворяет метод оценки по максимуму выходного эффекта. Так как выходной эффект достаточного приемника описывается функцией правдоподобия, то и метод носит название метода максимума функции правдоподобия.

Выходной эффект приемника может быть представлен как функция параметра α в виде

$$q(\alpha) = S(\alpha) + H(\alpha), \quad (123)$$

где

$$S(\alpha) = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_c(t, \alpha_0) u_c(t, \alpha) dt \quad (124)$$

— сигнальная функция

и

$$H(\alpha) = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_c(t, \alpha) u_{\text{ш}}(t, \alpha) dt. \quad (125)$$

— шумовая функция.

Сигнальная функция является регулярной (в том смысле, что она может быть вычислена для любых заданных значений параметров принимаемого сигнала). Она может быть представлена в виде (см. § 11)

$$S(\alpha) = R \Psi_0(\Delta\alpha), \quad (126)$$

где $\Psi_0(\Delta\alpha)$ — нормированная автокорреляционная функция сигнала по параметру α .

Максимум сигнальной функции равен:

$$S(\alpha)_{\text{макс}} = S(\alpha_0) = R \Psi_0(\Delta\alpha)_{\Delta\alpha=0} = R \Psi_{0\alpha}(0) = R. \quad (127)$$

Шумовая функция представляет случайный нормальный процесс со средним значением, равным нулю, дисперси-

ей, равной R , и среднеквадратическим значением \sqrt{R} . В тех случаях, когда $R \ll 1$, среднеквадратическое значение случайной составляющей значительно превосходит максимальное значение сигнальной функции, так как при этом условии $\sqrt{R} \gg R$. Выходное напряжение приемника содержит в этом случае многочисленные шумовые выбросы, превосходящие выброс, вызванный сигналом. Однозначное измерение в таких условиях невозможно.

При $R \gg 1$ $R \gg \sqrt{R}$ и сигнальный выброс значительно больше шумовых, что обеспечивает однозначность измерения. Чем больше последнее неравенство, тем выше точность измерений, так как меньше искажается шумом сигнальная функция, меньше случайные смещения ее максимума относительно истинного значения параметра α_0 за счет действия шума, меньше дисперсия оценки α^* .

Сигнальная функция всегда четная и симметрична относительно истинного значения α_0 . Поэтому физически должно быть понятно, что при $R \gg 1$ среднее по множеству оценок должно быть равно истинному значению, т. е. этот метод обеспечивает выполнение условия несмещенности оценки (122). Кроме того, в случае сигнала с известными параметрами выходное напряжение оптимального фильтра $q(\alpha)$ имеет нормальное распределение. Так как этот вид распределения по сравнению с другими дает наименьшую дисперсию, то оценка параметра при измерении по методу максимума функции правдоподобия будет обладать свойством эффективности.

При больших отношениях энергий сигнал/шум апостериорное распределение для сигналов с неизвестными параметрами асимптотически приближается к нормальному при увеличении R . При таких условиях оценка будет асимптотически эффективной.

Из физических соображений и самой сути метода максимума функции правдоподобия можно заранее утверждать, что при прочих равных условиях дисперсия оценки параметра будет тем меньше, чем уже пик сигнальной функции, т. е. чем уже автокорреляционная функция входного сигнала по измеряемому параметру. Следовательно, условия, наиболее благоприятные с точки зрения повышения точности измерения, совпадают качественно с условиями наилучшего разрешения. Установим теперь количественную связь дисперсии оценки с указанными факторами.

Для нахождения оценки параметра α надо найти значение α^*_0 , соответствующее максимуму выходного напряжения $q(\alpha)$. Математически это означает, что надо взять производную от $q(\alpha)$ по α , приравнять ее нулю и из полученного уравнения найти оценку α^*_0 . Выполняя две первые операции, получим:

$$\frac{d}{d\alpha} q(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} S(\alpha) + \frac{d}{d\alpha} H(\alpha) = 0. \quad (128)$$

Пусть оценка α^*_0 найдена. Для нахождения дисперсии подставим ее значение в (128):

$$\left[\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha^*_0} + \left[\frac{d}{d\alpha} H(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha^*_0} = 0. \quad (129)$$

При $R \gg 1$ оценка α^*_0 очень близка к истинному значению параметра α_0 . Поэтому, если во второе слагаемое (129) вместо α^*_0 подставить α_0 , то статистические характеристики случайной функции $H(\alpha)$ практически не изменятся:

$$\left[\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha^*_0} + \left[\frac{d}{d\alpha} H(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0} = 0. \quad (130)$$

Разложим функцию $S(\alpha)$ в ряд Тейлора в окрестности точки α_0 :

$$\begin{aligned} S(\alpha) = & S(\alpha_0) + (\alpha^*_0 - \alpha_0) \left[\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0} + \\ & + \frac{(\alpha^*_0 - \alpha_0)^2}{2} \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0} + \dots \end{aligned} \quad (131)$$

Первый член в (131) есть постоянная величина, а все четные члены равны нулю вследствие равенства нулю входящих в них производных нечетных порядков (так как функция $S(\alpha)$ четная). Отбрасывая вследствие малости все значащие члены разложения, начиная с пятого и дифференцируя (131), получим:

$$\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) \approx (\alpha^*_0 - \alpha_0) \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}.$$

Подставляя этот результат в (130), будем иметь:

$$(\alpha^*_0 - \alpha_0) \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0} + \left[\frac{d}{d\alpha} H(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0} \approx 0. \quad (132)$$

Из (132) имеем:

$$(\alpha_0^* - \alpha_0) = - \frac{\left[\frac{d}{d\alpha} H(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}}{\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}}.$$

Возводя обе части равенства в квадрат и усредняя левую часть по множеству, а правую по времени (черта \sim над символом), что равнозначно для имеющего место стационарного процесса, получим:

$$\sigma^2(\alpha) = \overline{(\alpha_0^* - \alpha_0)^2} = \frac{\overline{\left[\frac{d}{d\alpha} H(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}^2}}{\overline{\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}^2}}. \quad (133)$$

Представим:

$$H(\alpha) = \sqrt{R} h(\alpha), \quad (134)$$

где \sqrt{R} — среднеквадратическое значение шумовой функции;

$h(\alpha)$ — нормированный случайный процесс со среднеквадратическим значением, равным единице.

Подставляя (134) в (133), будем иметь:

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{R \overline{\left[\frac{d}{d\alpha} h(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}^2}}{\overline{\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}^2}}. \quad (135)$$

В числителе правой части член $\overline{\left[\frac{d}{d\alpha} h(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}^2}$ представляет дисперсию производной нормированного нормального случайного процесса. Можно показать [Л. 9], что она равна второй производной от корреляционной функции этого процесса, взятой с обратным знаком и при нулевом значении аргумента, т. е.

$$\overline{\left[\frac{d}{d\alpha} h(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}^2} = -\Psi''_{0h}(0). \quad (136)$$

В свою очередь автокорреляционная функция шумового процесса на выходе оптимального фильтра, при белом

шуме на входе, равна автокорреляционной функции входного сигнала. На приводя математических доказательств этого утверждения, напомним лишь то обстоятельство, что отклик оптимального фильтра на каждый шумовой выброс есть импульсная переходная характеристика фильтра, которая совпадает с зеркальным отображением входного сигнала. Следовательно, шум на выходе фильтра подобен сигналу на его входе, и нормированная автокорреляционная функция выходного шума, таким образом, совпадает с нормированной автокорреляционной функцией сигнала на входе. Отсюда можно записать, что

$$\left[\frac{d}{d\alpha} h(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}^2 = -\Psi''_{0\alpha}(0), \quad (137)$$

где $\Psi_{0\alpha}(0)$ — нормированная автокорреляционная функция входного сигнала при $\Delta\alpha = 0$.

Учитывая, что

$$\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} S(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}^2 = R^2 [\Psi''_{0\alpha}(0)]^2, \quad (138)$$

и подставляя (137) и (138) в (135), окончательно получим:

$$\sigma^2(\alpha) = -\frac{1}{R\Psi''_{0\alpha}(0)}. \quad (139)$$

Так как высокочастотное заполнение в выходных сигналах обычно не используется, то от высокочастотной автокорреляционной функции следует перейти к ее огибающей. Законность такого перехода при принятых здесь допущениях уже была обоснована ранее (§ 13). При этом получим:

$$\sigma^2(\alpha) = -\frac{1}{R|\Psi''_{0\alpha}(0)|}. \quad (140)$$

Физический смысл формул (139) и (140) легко поясняется: точность измерений возрастает при увеличении отношения энергий сигнал/шум и остроты пика автокорреляционной функции, характеризующейся второй ее производной. Последнее иллюстрируется рис. 46 и 47, где показаны соответственно широкая и узкая автокорреляционные функции входных сигналов и их первые и вто-

рые производные. Наличие знака «минус» в формулах (139) и (140) для существенно положительной величины — дисперсии объясняется тем, что вторая производная автокорреляционной функции при нулевом значении аргумента всегда отрицательна.

Используя полученные результаты, определим дисперсии оценок времени прихода и частоты и среднеквадратические ошибки их измерений для входных сигналов с гауссовой формой огибающей и линейной частотной модуляцией.

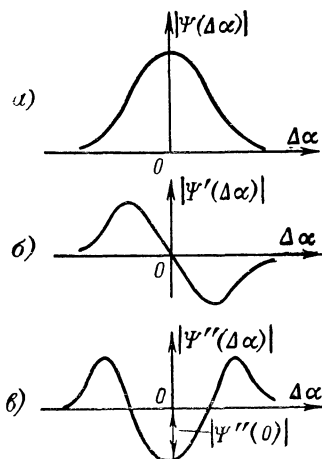


Рис. 46. Автокорреляционная функция сигнала большой длительности (а); первая производная (б); вторая производная (в).

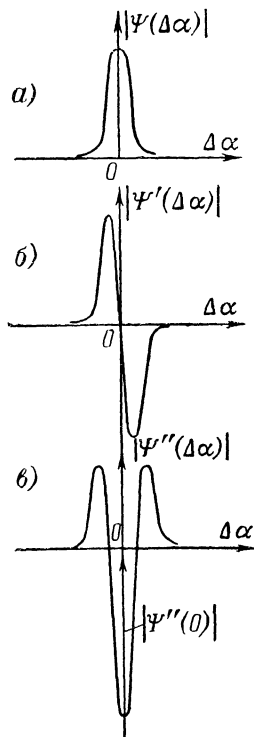


Рис. 47. Автокорреляционная функция сигнала малой длительности (а); первая производная (б); вторая производная (в).

Нормированная автокорреляционная функция по времени для этого сигнала имеет вид (49), а ее вторая производная при $\tau=0$ равна:

$$\Psi''_{0\tau}(0) = -\left(\gamma^2 + \frac{b^2}{\gamma^2}\right) = -\gamma^2 \left(1 + \frac{b^2}{\gamma^4}\right) = -\gamma^2 k_{сж}^2, \quad (141)$$

где $k_{сж}$ определяется формулами (51), (52).

Подставляя (141) в (140), получим дисперсию оценки времени прихода сигнала:

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{R\gamma^2 k_{сж}^2} = \frac{\tau_{\text{н}}^2}{\pi R k_{сж}^2}. \quad (142)$$

Потенциальная среднеквадратическая ошибка измерения равна:

$$\sigma(t)_{\text{пот}} = \frac{\tau_{\text{н}}}{\sqrt{\pi R} k_{сж}}. \quad (143)$$

Формулы (142) и (143) показывают, что точность измерений можно повысить, увеличивая отношение энергий сигнал/шум, уменьшая длительность сигнала и увеличивая девиацию частоты. При отсутствии частотной модуляции ($b=0$; $k_{сж}=1$)

$$\sigma(t_{\text{пот}}) = \frac{\tau_{\text{н}}}{\sqrt{\pi R}}. \quad (144)$$

Таким образом, применение частотной модуляции увеличивает точность измерений времени прихода по сравнению с немодулированными сигналами. Этот же вывод можно сделать, анализируя изменение диаметра эллипса неопределенности, совпадающего с осью τ (рис. 33) для модулированных и немодулированных сигналов, если считать частоту известной ($\Delta\omega=0$).

Нормированная автокорреляционная функция по частоте для сигнала с гауссовой огибающей и частотной модуляцией имеет вид (58), а ее вторая производная при $\Delta\omega=0$ равна:

$$\Psi''_{0\Delta\omega}(0) = -\frac{1}{4\gamma^2}. \quad (145)$$

Подставляя (145) в (140), получим:

$$\sigma^2(\omega) = \frac{4\gamma^2}{R} = \frac{4\pi}{R\tau_{\text{н}}^2}. \quad (146)$$

Потенциальная среднеквадратическая ошибка измерения частоты равна:

$$\sigma(\omega)_{\text{пот}} = \frac{2\gamma}{\sqrt{R}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{R}\tau_{\text{н}}}. \quad (147)$$

Формулы (146) и (147) показывают, что точность измерения частоты увеличивается при увеличении отношения энергии сигнал/шум и при увеличении длительности сигнала. Наличие модуляции в данном случае измерения, когда сдвиг по времени считается известным ($\tau=0$), не изменяет точности оценки. Следует еще раз подчеркнуть, что здесь рассматривается точность измерения *только одного* какого-либо параметра сигнала — либо времени, либо частоты, а второй считается известным. Поэтому не надо искать взаимных противоречий при анализе формул (143) и (147), ибо они не могут в данном случае рассматриваться одновременно при выборе вида сигнала.

21. Потенциальная точность одновременного измерения двух параметров сигнала

Пусть выходное напряжение является функцией двух параметров α и β и может быть представлено в виде

$$q(\alpha, \beta) = S(\alpha, \beta) + H(\alpha, \beta), \quad (148)$$

где

$$S(\alpha, \beta) = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_{\text{с}}(t, \alpha_0, \beta_0) u_{\text{с}}(t, \alpha, \beta) dt \quad (149)$$

и

$$H(\alpha, \beta) = \frac{2}{E_{\text{ш}}} \int_0^{T_{\text{н}}} u_{\text{с}}(t, \alpha, \beta) u_{\text{ш}}(t, \alpha, \beta) dt. \quad (150)$$

Применяя тот же метод оценки по максимуму выходного эффекта, продифференцируем $q(\alpha, \beta)$ вначале по α , потом по β и приравняем результаты нулю. Получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} S(\alpha, \beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} H(\alpha, \beta) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \beta} S(\alpha, \beta) + \frac{\partial}{\partial \beta} H(\alpha, \beta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Далее поступаем аналогично предыдущему: разлагаем $S(\alpha, \beta)$ в ряд Тейлора около точек α_0 и β_0 как функцию двух переменных; удерживая в разложении шесть пер-

вых членов и учитывая замечания, сделанные при выводе (132), производим дифференцирование оставшихся членов по α и по β ; подставляем полученные значения:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} S(\alpha, \beta)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \beta} S(\alpha, \beta)$$

в (151); решая полученную систему уравнений, находим оценки α^*_0 и β^*_0 . Не перечисляя дальнейших операций, повторяющих ход вывода предыдущего параграфа, окончательно получим:

$$\sigma^2(\alpha) = - \frac{1}{R |\Psi''_{0\alpha}(0, 0)|} \frac{1}{1-r^2}; \quad (152)$$

$$\sigma^2(\beta) = - \frac{1}{R |\Psi''_{0\beta}(0, 0)|} \frac{1}{1-r^2}; \quad (153)$$

$$r^2 = \frac{|\Psi''_{0\alpha\beta}(0, 0)|^2}{|\Psi''_{0\alpha}(0, 0)| |\Psi''_{0\beta}(0, 0)|}, \quad (154)$$

где

$$|\Psi''_{0\alpha}(0, 0)| = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left| \Psi_0(\Delta\alpha, \Delta\beta) \right|_{\substack{\Delta\alpha=0 \\ \Delta\beta=0}}; \quad (155)$$

$$|\Psi''_{0\beta}(0, 0)| = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left| \Psi_0(\Delta\alpha, \Delta\beta) \right|_{\substack{\Delta\alpha=0 \\ \Delta\beta=0}}; \quad (156)$$

$$\left| \Psi''_{0\alpha, \beta}(0, 0) \right| = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left| \Psi_0(\Delta\alpha, \Delta\beta) \right|_{\substack{\Delta\alpha=0 \\ \Delta\beta=0}}. \quad (157)$$

Множитель $1/(1-r^2)$ отражает корреляционную связь между изменяемыми параметрами. При наличии корреляции ($r > 0$) этот множитель будет больше единицы и точность измерений будет хуже, чем при некоррелированных α и β . Покажем это на примере одновременного измерения времени прихода сигнала и его частоты. Рассмотрим вначале сигнал в виде импульса с гауссовой огибающей и линейной частотной модуляцией. Его сме-

шанная автокорреляционная функция имеет вид (64), а вторые производные (155), (156) и (157) равны:

$$|\Psi''_{0\tau\Delta\omega}(0, 0)| = \frac{b}{2\gamma^2}; \quad (158)$$

$$|\Psi''_{0\tau}(0, 0)| = -\gamma^2 \left(1 - \frac{b^2}{\gamma^2}\right) = -\gamma^2 k_{сж}^2; \quad (159)$$

$$|\Psi''_{0\Delta\omega}(0, 0)| = -\frac{1}{4\gamma^2}. \quad (160)$$

Подставляя эти значения в (154), (152) и (153), получим:

$$r^2 = \frac{b^2}{\gamma^4 k_{сж}^2}; \quad (161)$$

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{R\gamma^2} = \frac{\tau_n^2}{\pi R}; \quad (162)$$

$$\sigma^2(\omega) = \frac{4\gamma^2}{R} k_{сж}^2. \quad (163)$$

Потенциальные среднеквадратические ошибки измерения времени и частоты соответственно равны:

$$\sigma(t)_{\text{пот}} = \frac{1}{\sqrt{R}\gamma} = \frac{\tau_n}{\sqrt{\pi R}}; \quad (164)$$

$$\sigma(\omega)_{\text{пот}} = \frac{2\gamma}{\sqrt{R}} k_{сж} = \frac{2\pi}{\sqrt{R}\tau_n} k_{сж}. \quad (165)$$

Сопоставим теперь выражения, соответствующие раздельному измерению либо времени при известной частоте (143), либо частоты при известном времени прихода (147), с аналогичными выражениями (164) и (165) при *одновременном* измерении этих параметров. При измерении только времени при известной частоте ($\Delta\omega=0$) ошибку можно уменьшить, уменьшая отношение $\tau_n/k_{сж}$. Если невыгодно уменьшать длительность импульса из-за энергетических соображений, можно идти по пути увеличения девиации частоты (увеличения $k_{сж}$).

При одновременном измерении сдвиг по частоте ω неизвестен, поэтому точность измерения времени определяется всем «размахом» эллипса неопределенности

(рис. 33), а он равен диаметру эллипса для немодулированного сигнала, совпадающему с осью τ . Таким образом, при одновременном измерении времени и частоты точность измерения времени может быть улучшена только лишь одним путем — уменьшением длительности импульса. Применение внутриимпульсной модуляции в общем случае точности измерения не повысит. Сравнение выражений (147) и (165) показывает, что при одновременном измерении t и ω применение модуляции в $k_{сж}$ раз ухудшает точность измерения частоты по сравнению с немодулированным сигналом.

Следовательно, мы приходим к выводу, что при одновременном измерении времени и частоты применение сигналов в виде одиночных импульсов нецелесообразно, так как не позволяет решить противоречие между необходимостью уменьшать длительность импульсов при измерении времени и увеличивать ее при измерении частоты. Перспективным является переход к другим видам сигналов, например к «пачке» когерентных импульсов. При таком сигнале точность измерения времени определяется также выражением (164), но точность измерения частоты улучшается примерно в $NT_{и}/\tau_{и}$ раз. Это подтверждает и вид площади неопределенности для такого вида сигнала (рис. 39). Следует, однако, снова подчеркнуть, что в практических случаях неизвестный сдвиг по частоте может быть весьма малым по сравнению с шириной спектра сигнала, и частоту можно считать известной. Таким образом, в этих случаях имеет место измерение лишь одного параметра — времени, и применение частотно-модулированных сигналов существенно повышает точность его измерения.

Приведенные выше примеры касались лишь измерения времени прихода сигнала и его частоты, и ничего не говорилось об измерении направления (угла) прихода сигнала. Так было сделано потому, что время и частота в выходном сигнале при модулированном входном являются взаимокоррелированными при одновременном измерении, и выбор временного параметра обязательно влияет на точность измерения частоты и наоборот.

Точность измерения угла прихода при существующих методах пеленгации зависит лишь от ширины и формы диаграммы направленности антенны и не связана с точностью измерения времени и частоты. При пеленгации с помощью равномерно вращающихся остро направлен-

ных антенн выходное напряжение приемника будет функцией угла поворота антенны, пропорционального времени. Поэтому для оценки направления прихода сигнала при аппроксимации диаграммы направленности колокольной кривой можно пользоваться теми же формулами, что и для времени при немодулированном сигнале (142) и (143), заменив длительность импульса шириной диаграммы направленности, отсчитанной на уровне $\approx 0,5$ от максимума.

22. Реальная точность измерения параметров сигналов

Реальная точность измерений может быть значительно меньше потенциальной. Причинами уменьшения точности являются дополнительные ошибки, связанные с условиями распространения радиоволн, с уменьшением отношения энергий сигнал/шум в различных узлах приемного тракта из-за несогласованности их характеристик с характеристиками сигнала, с несовершенством отсчетных устройств. В большинстве практических случаев ошибки, вызываемые действием различных факторов, можно считать независимыми. Результирующая ошибка параметра α с учетом сказанного может быть представлена в виде

$$\Delta\alpha = \sqrt{\Delta(\alpha)_{\text{пот}}^2 + \Delta(\alpha)_{\text{распр}}^2 + \sum_i \Delta(\alpha)_i^2} = \eta_\alpha \Delta(\alpha)_{\text{пот}}, \quad (166)$$

где $\Delta(\alpha)_{\text{пот}}$ — потенциальная ошибка измерения;

$\Delta(\alpha)_{\text{распр}}$ — ошибка, связанная с условиями распространения;

$\Delta(\alpha)_i$ — ошибка, возникающая в i -м узле аппаратуры из-за несовершенства его выполнения;

$$\eta_\alpha = \sqrt{1 + \frac{\Delta(\alpha)_{\text{распр}}^2}{\Delta(\alpha)_{\text{пот}}^2} + \frac{\sum \Delta(\alpha)_i^2}{\Delta(\alpha)_{\text{пот}}^2}}. \quad (167)$$

Коэффициент η_α называется коэффициентом ухудшения точности.

Ошибки, связанные с условиями распространения, возникают, главным образом, из-за искривления траекторий распространения, вызываемого непостоянством коэффициента преломления по высоте. В тропосфере (высоты до 10—12 км) коэффициент преломления в нор-

мальных метеоусловиях равномерно уменьшается от значения $1,00067$ у поверхности Земли с градиентом $dn/dH = -4 \cdot 10^{-8} \text{ 1/м}$. В стратосфере (высоты $19\text{--}80 \text{ км}$) коэффициент преломления постоянен и равен 1 . Как в тропосфере, так и в стратосфере он не зависит от частоты распространяющихся колебаний. В третьем слое

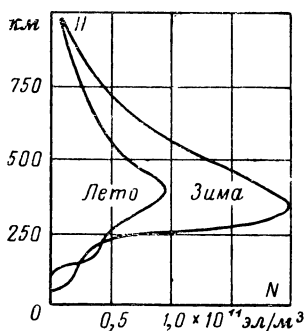


Рис. 48. Изменение концентрации свободных электронов с высотой в ионосфере.

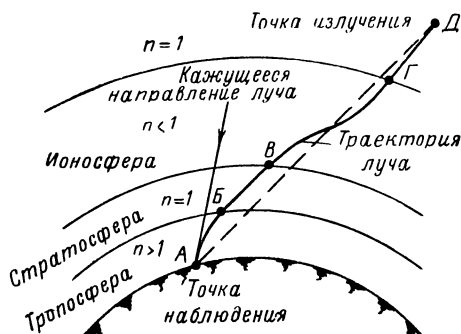


Рис. 49. Искривление радиолуча при распространении.

атмосферы — ионосфере — коэффициент преломления меньше 1 , величина его зависит от концентрации свободных электронов N_0 и несущей частоты, причем

$$n = \sqrt{1 - \frac{80,8 N_0}{f_0^2}}. \quad (168)$$

Здесь N_0 — число электронов в 1 м^3 ;
 f_0 — несущая частота колебаний.

Так как N_0 изменяется немонотонно с высотой (рис. 48), то n имеет минимум на высотах $300\text{--}400 \text{ км}$.

В соответствии с изменением коэффициента преломления искривляется и радиолуч (рис. 49). В тропосфере (участок AB) луч пригибается к Земле (положительная рефракция); в стратосфере преломления не происходит (участок BB); в ионосфере, где $n < 1$, рефракция отрицательна, и луч удаляется от поверхности Земли (участок $BГ$); за пределами ионосферы $n = 1$ и луч распространяется прямолинейно. Такой характер искривления

луча приводит к тому, что на Земле измеряются угол прихода луча и время запаздывания, бóльшие по сравнению с истинными величинами. Несущая частота приходящих колебаний также измеряется с ошибкой, вызванной тем, что кажущаяся радиальная составляющая ско-

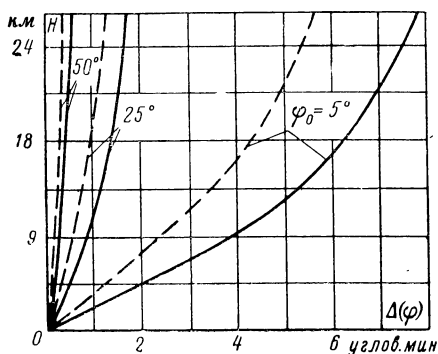


Рис. 50. Ошибки измерения угла места при распространении в тропосфере.

— влажность 100%; — — — влажность 0%; φ_0 — истинный угол места.

рости объекта V'_R отличается от истинной радиальной скорости V_R на величину

$$\Delta V_R = V_R - V'_R.$$

Это отличие вызывает ошибку в измерении доплеровского смещения частоты, равную

$$\Delta f_d = 2 \frac{\Delta V_R}{c} f_0. \quad (169)$$

На рис. 50 приведен график ошибок в измерении угла места при распространении в тропосфере, а на рис. 51 — при распространении в ионосфере. Видно, что ошибки увеличиваются при уменьшении угла места, влажности (для тропосферы) и зависят от времени суток (для ионосферы). Величина ошибок при малых углах места для точных измерительных радиоустройств может быть соизмеримой с общей ошибкой измерения. На рис. 52 приведен график измерения времени запаздывания в тропосфере. Ошибки также увеличиваются с уменьшением

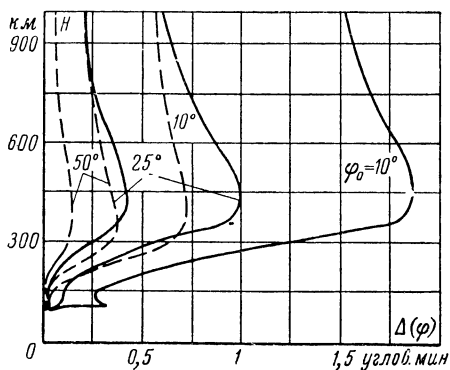


Рис. 51. Ошибки измерения угла места при распространении в ионосфере, частота 400 Мгц.

— — — — — днем; — — — — — ночью; φ_0 — угол места относительно нижней границы ионосферы.

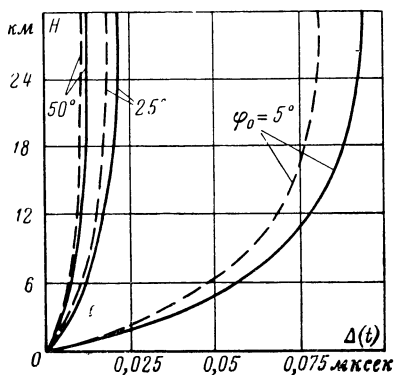


Рис. 52. Ошибки измерения времени запаздывания при распространении в тропосфере (в одном направлении).

— — — — — влажность 100%;
- - - - - влажность 0%.

угла места и увеличением влажности и имеют в неблагоприятных случаях существенную для точных измерений величину. Еще больше эти ошибки при распространении в ионосфере (рис. 53).

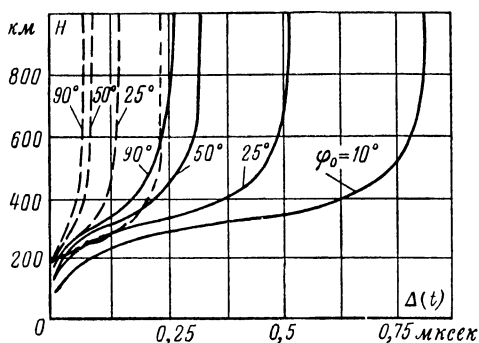


Рис. 53. Ошибки измерения времени запаздывания при распространении в ионосфере (в одном направлении).

— — — — — днем; — — — — — ночью, частота 400 Мгц.

На рис. 54 приведен график ошибок в определении доплеровской частоты для высоты 30 км и горизонтальной скорости движения объекта переизлучения 6 км/сек.

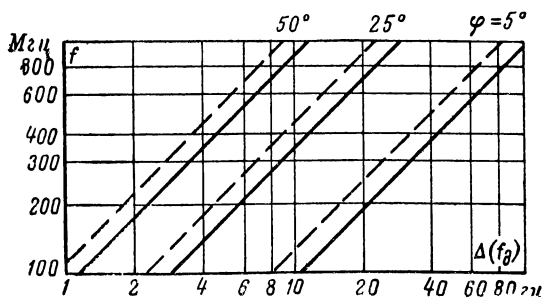


Рис. 54. Ошибки измерения доплеровской частоты.

— — — — — влажность 100%; — — — — — влажность 0%.
Скорость объекта 6 км/сек; высота — 30 км.

Ошибки в определении направления прихода луча, времени запаздывания и частоты, вызванные искривлением траекторий, по сути дела являются систематиче-

скими. Но практическая невозможность точного их расчета на всем пути распространения заставляет смотреть на них, как на случайные. Кроме этих систематических ошибок, имеются истинно случайные ошибки в измерении указанных параметров, вызываемые неоднородностями атмосферы. Однако эти ошибки относительно малы, и их рассмотрение выходит за пределы книги.

Анализ ошибок, возникающих в узлах аппаратуры из-за их несовершенства, может быть произведен для конкретного типа радиоустройства при подробном рассмотрении его схемы, данных и конструкции.

Как правило, решающее значение в отношении точности измерения имеет характер выходного устройства измерителя. Наибольшие ошибки возникают при применении индикаторных выходных устройств с визуальным отсчетом, наименьшее — в случае непрерывного слежения за измеряемым параметром с помощью автоматических выходных устройств непрерывного действия (дальномеров, угломеров, частотомеров), которые, однако, могут следить за сигналами только одного объекта.

При применении выходных устройств в виде цифровых вычислительных машин дискретного действия (ЦВМ) можно автоматически и с достаточной точностью следить за сигналами многих объектов. Однако эти преимущества достигаются путем существенного усложнения аппаратуры.

В заключение рассмотрим пример определения общей ошибки измерения параметра.

Пусть объект, облучаемый наземной радиолокационной станцией (РЛС), находится на высоте 20 км и наблюдается под углом места 5° с вероятностями $W_{п.о}=0,9$ и $W_{л.т}=10^{-3}$. Сигналы РЛС имеют вид гауссовых импульсов с $\tau_{и}=1$ мксек. Выходным устройством РЛС является электроннолучевой индикатор с линейной шкалой, имеющей предельное значение $D_{шк}=300$ км и длину $L_{шк}=100$ мм. Для отсчета расстояний используется электронная шкала с ценой деления 30 км. Необходимо найти общую ошибку измерения времени запаздывания сигналов, отраженных от объекта (или дальность до него). Сигнал предполагаем нефлуктуирующим.

По формуле (144) рассчитываем потенциальную ошибку измерения. Для определения R используем кривые рис. 17. Из них находим, что для $W_{п.о}=0,9$ и

$W_{л.т} = 10^{-3} R = 25$. Отсюда

$$\sigma(t)_{\text{шот}} = \frac{10^{-6}}{\sqrt{3,14 \cdot 25}} = 11,5 \cdot 10^{-8} \text{ сек.}$$

Ошибка измерения дальности может быть получена из соотношения

$$\sigma(D)_{\text{шот}} = \frac{c}{2} \sigma(t)_{\text{шот}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2} 11,5 \cdot 10^{-8} = 17,3 \text{ м.}$$

По графику рис. 52 находим, что ошибка в измерении из-за искривления луча при влажности 100% равна $\approx 0,09$ мксек. Принимаем эту ошибку за среднеквадратичную, т. е. $\sigma(t) = 0,09$ мксек. Соответственно ошибка в измерении дальности составляет ≈ 15 м.

Ошибка при отсчете по индикатору с электронной шкалой возникает, как правило, при интерполяции отметки сигнала. Считая, что оператор может при интерполяции ошибиться не более чем на 0,1 интервала между метками, получим ошибку в измерении дальности равной $\sigma(D)_{\text{инд}} = 0,1 \cdot 30 = 3$ км, что соответствует ошибке в измерении времени

$$\sigma(t)_{\text{инд}} = \frac{2\sigma(D)_{\text{инд}}}{c} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 10^8} = 20 \cdot 10^{-8} \text{ сек.}$$

Результирующая ошибка будет равна:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sqrt{\sigma(t^2)_{\text{шот}} + \sigma(t^2)_{\text{распр}} + \sigma(t^2)_{\text{инд}}} = \\ &= \sqrt{(11,5 \cdot 10^{-8})^2 + (0,09 \cdot 10^{-6})^2 + (20 \cdot 10^{-8})^2} \approx 20 \cdot 10^{-8} = \\ &= 20 \text{ мксек.} \end{aligned}$$

Это соответствует ошибке в измерении дальности ≈ 3 км. Коэффициент ухудшения точности при этом будет равен $\eta_t = 500$. Из этого примера видно, что бессмысленно стремиться к увеличению точности выбором параметров сигнала, т. е. путем уменьшения потенциальной ошибки, а следует думать о рациональном выборе масштабов шкал индикатора.

При применении в качестве выходного устройства ЦВМ время измеряется путем счета эталонных импульсов. Пусть частота их следования 0,5 Мгц. Это соответствует периоду $T_{\text{эт}} = 2$ мксек. Считая, что ошибка из-за

дискретности отсчета имеет равномерное распределение, получим [Л. 3]:

$$\sigma(t)_{\text{ЦВМ}} = \frac{T_{\text{от}}}{2\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\sqrt{3}} \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ сек.}$$

Эту ошибку можно на порядок уменьшить применением принципа нониусного отсчета. Следовательно, применение ЦВМ в качестве выходного устройства позволяет сделать аппаратную ошибку сравнимой с ошибкой распространения.

Автоматические выходные устройства непрерывного слежения применяются в большинстве случаев при измерении сравнительно малых дальностей, и ошибки распространения можно не учитывать. Собственные ошибки выходных устройств этого типа обычно меньше потенциальных, поэтому они позволяют получить точность, близкую к потенциальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоноровский И. С., Радиотехнические цепи и сигналы. Изд-во «Советское радио», 1964 г.
2. Харкевич А. А., Борьба с помехами. Изд-во «Наука», 1965.
3. Вентцель Е. С., Теория вероятностей. Физматгиз, 1958.
4. Гуткин Л. С., Лебедев В. Л., Сифоров В. И., Радиоприемные устройства, ч. I, изд-во «Советское радио», 1961.
5. Каневский З. М., Филькенштейн М. И., Флуктуационная помеха и обнаружение импульсных радиосигналов. Госэнергоиздат, 1963.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
7. Гуткин Л. С., Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. Госэнергоиздат, 1961.
8. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А., Справочник по математике. ПИТЛ, 1953.
9. Левин Б. Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1961.
10. Ширман Я. Д., Голиков В. Н., Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Советское радио», 1963.
11. Хелстром К., Статистическая теория обнаружения сигналов. Изд-во иностр. лит., 1963.

Цена 36 коп.